1. Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą zaś $T(t)$ będzie mocno ciągłą półgrupą kontrakcji na $C_0(X)$. Definiujemy funkcjonały ϕ_x wzorem:

$$\phi_x(f) = \lim_{t\to+0} t^{-1}(T(t) * f - f)(x)$$

gdzie dziedziną jest zbiór tych funkcji dla których granica istnieje. Niech V będzie przestrzenią tych f że $f \in D(\phi_x)$ dla dowolnego x i $(Bf)(x) = \phi_x(f)$ należy do $C_0(X)$. Pokazać że tak zdefiniowany B z dziedziną V jest równy generatorowi A półgrupy $T(t)$.

Wskazówka: Jeśli $A \subset B$, A jest generatorem, B jest dyssypatywny, to $A = B$.

2. Niech $T(t)$ będzie mocno ciągłą półgrupą splotową miar na grupie lokalnie zwartej G, tzn. $T(t)f = \mu_t * f$. Pokazać że wtedy

$$\phi_T(f) = \lim_{t\to+0} t^{-1}(\mu_t * f - f)(e)$$

jest gęsto zdefiniowanym funkcjonałem na $C_0(G)$, przy tym wszystkie funkcje znikające w pewnym otoczenio e należą do dziedziny ϕ_T, a po obcięciu do takich funkcji ϕ_T jest równe mierze dodatniej ν, lokalnie skończonej na $G - \{e\}$. Następnie, generator A półgrupy $T(t)$ jest zadany wzorem $Af(x) = \phi_T(f(\cdot x))$, z dziedziną będącą zbiorem tych funkcji dla których prawa strona ma sens i należy do $C_0(G)$. Ponadto, jeśli G jest grupą Liego to funkcje z $C_0(G)$ mające dwie lewe pochodne w $C_0(G)$ należą do dziedziny A. Wywnioskować stąd że $A = L + A_\nu$ gdzie

$$A_\nu f(x) = \int_G (f(y^{-1}x) - f(x) - \sum_j \chi_U y_j Y_j f(x)) d\nu(x),$$

U jest otoczeniem e, y_j są współrzędnymi na U, Y_j są polami wektorowymi odpowiadającymi y_j (tzn. $Y_j f(e) = \partial_{y_j} f(e)$), zaś $L = \sum_{i=1}^l X_i^2 + X_0$ jest podlaplasianem z dryfem i że każdy A takiej postaci jest generatorem półgrupy miar.

Wskazówka: Zauważyć że półgrupa zachowuje przestrzeń funkcji mających dwie prawe pochodne w $C_0(G)$ i wyciągnąć stąd wnioski o ϕ_T.

3. Niech X będzie polem wektorowym na grupie Liego G, zaś ρ będzie ciągłą (jako funkcja z $G \times E$ do E) reprezentają G na przestrzeni wektorowo-topologicznej E. Operator $\rho(X)$ definiujemy wzorem

$$\rho(X)v = \lim_{t\to 0} t^{-1}(\rho(\exp(tX)) - I)v$$

przy tym dziedziną jest zbiór tych wektorów że granica istnieje. Pokazać dla $v \in D(\rho(X))$ odwzorowanie $t \mapsto \rho(\exp(tX)v$ jest C^1. Jeśli X_i, $i = 1, \ldots, n$ stanowią bazę algebry Liego G, $v \in D(\rho(X_i))$, $i = 1, \ldots, n$ to odwzorowanie $x \mapsto \rho(x)v$ jest C^1 na G. Wywnoskować stąd że v jest w dziedzinie dowolnego produktu X_i wtedy i tylko wtedy gdy odwzorowanie $x \mapsto \rho(x)v$ jest C^∞ na G (takie v nazywamy wektorami gładkimi).

Uwaga: Nadużywając jęzka nazywamy tak zdefiniowane odwzorwanie algebry Liego reprezentacją, jednakże faktycznie jest to antyreprezentacja, tzn. $\rho([X,Y]) = [\rho(Y), \rho(X)]$. Aby dostać reprezentację należałoby zmienić znak przy X w definicji $\rho(X)$ (lub zmienić znak w definicji przyporządkowującej elementom algebry Liego pola wektorowe).

4. Rozpatrujemy teraz ciągłe reprezentacje na przestrzeni Banacha. Niech

$$\rho(f)v = \int_G f(x)\rho(x)dx$$

Pokazać że dla $f \in C_c^\infty(G)$ powyższa definicja ma sens dla dowolnego v i $\rho(f)v$ jest wektorem gładkim. Zauważyć że jeśli ϕ jest dystrybucją o nośniku zwartym to obraz ϕ przez ρ ma naturalną definicję na wektorach gładkich.

5. Niech G będzie spójną grupą Liego. Pokazać że jeśli ϕ_n jest gładką splotową jedynką aproksymatywną, tzn $\phi_n \in C_c^\infty(G)$, dla dowolnego otoczenia $e \in U$ $\mathrm{supp}(\phi_n) \subset U$ dla dużych n, $\int \phi_n = 1$, $\phi_n \geq 0$, $\int d(x,e)|\nabla\phi_n| < C$ ze stałą niezależną od n, to $\lim X(\phi_n * f)(e) = \lim \phi_n * Xf(e) = Xf(e)$ dla dowolnego $f \in C^1(G)$. Wywnioskować stąd że jeśli ρ_i, $i = 1, 2$ są ciągłymi reprezentacjami G na przestrzeni Banacha E, takimi zbiory wektorów gładkich dla ρ_i są równe oraz dla dowolnego X z algebry Liego G i dowolnego wektora gładkiego $\rho_1(X)v = \rho_2(X)v$ to ρ_i są równe. Innymi słowy, reprezentacja algebry Liego jednoznacznie wyznacza reprezentację grupy Liego.

6. Niech G będzie grupą Heisenberga H_1 z mnożeniem zadanym wzorem

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + x_2 y_1)$$

zaś $X = \partial_x$, $Y = \partial_y + x\partial_z$, $Z = \partial_z$ będą polami wektorowymi. Sprawdzić że wzór $\rho((x,y,z))f(s) = \exp(i(y(s+x) - z))f(s+x)$ zadaje reprezentację H_1 na $L^2(\mathbb{R})$. Obliczyć obrazy pól X, Y i Z. Wywnioskować stąd że dowolny operator różniczkowy o współczynnikach wielomianowych na $\mathbb{R}$ jest obrazem operatora prawostronnie niezmienniczego na H_1.

7. Rozważamy na $\mathbb{R}^n$ skończoną rodzinę operatorów, składającą się z pochodnych względem współrzędnych i z mnożenia przez pewne wielomiany. Pokazać że rodzina ta generuje skończenie wymiarową nilpotentną algebrę Liego. Opisać odpowiadającą jej grupę Liego G. Znaleźć reprezentację G taką że operatory z których wystartowaliśmy są obrazami przez reprezentację generatorów algebry Liego G.

8. Pokazać że jeśli $G = \mathbb{R}X \oplus \oplus_i V_i$ jest grupą jednorodną z dylatacjami takimi że $\delta(t)x = t^{\alpha_i}x$ na V_i, V_i są przemienne, A_i jest dodatnio określonym operatorem eliptycznym na V_i rzędu m/α_i, X jest polem wektorowym jednorodynym rzędu m, to $A = \sum A_i + X$ spełnia warunek Rocklanda (na wektorach gładkich).

Wskazówka: Jeśli v jest wektorem gładkim, $x \in V_i$ to

$$\langle A_i v, v\rangle = \langle A_i\rho(x)v, \rho(x)v\rangle = \lim c_R \int_{|x|<R} \langle A_i\rho(x)v, \rho(x)v\rangle dx.$$