1. Niech A będzie pierścieniem z jedynką, zaś M będzie A-modułem (reprezentacją A). Dla $v \in M$ niech $I_v = \{a \in A : av = 0\}$. Pokazać że I_v jest lewym ideałem w A. Następnie, I_v jest ideałem maksymalnym wtedy i tylko wtedy gdy $Av \subset M$ jest reprezentacją nieprzywiedlną (modułem prostym). Ponadto pary (M, v) gdzie $v \in M$ i $Av = M$ są w 1-1 odpowiedniości z lewymi ideałami I_v.

Gdy dodatkowo A jest algebrą Banacha, zaś M jest przestrzenią Banacha, to I_v jest ideałem domkniętym.

2. Niech A będzie algebrą nad $\mathbb{C}$ z inwolucją. Mówimy że funkcjonał ϕ na A jest dodatni jeśli $\phi(x^*x) \geq 0$ (gdzie $*$ oznacza inwolucję). Niech $A_\phi = \{x \in A : \phi(x^*x) = 0\}$. Pokazać A_ϕ jest podprzestrzenią liniową i że wzór

$$\langle x + A_\phi, y + A_\phi \rangle = \phi(y^*x)$$

definiuje iloczyn skalarny na $E_\phi = A/A_\phi$. Przy tym mnożenie z lewej strony przez elementy A prowadzi do $*$-reprezentacji A. Jeśli A jest algebrą Banacha a inwolucja jest ciągła, to tą $*$-reprezentację można rozszerzyć do uzupełnienia H_ϕ przestrzeni E_ϕ. Jeśli ponadto A ma jedynkę aproksymatywną x_α (tzn. x_α jest ciągiem uogólnionym takim że $\|x_\alpha\| \leq C$ i dla dowolnego $x \in A$ mamy $\lim x_\alpha x = \lim x x_\alpha = x$) to istnieje $v \in H_\phi$ o normie 1 taki że $\phi(x) = \langle xv, v \rangle$.

Wskazówka: Rekursywnie użyć wzór

$$\|xy\|_{H_\phi} \leq \|x^*xy\|_{H_\phi}^{1/2} \|y\|_{H_\phi}^{1/2}$$

do pokazania że

$$\|xy\|_{H_\phi} \leq (C\|(x^*x)^{2^{n-1}}\|_A \|y\|_A)^{2^{-n}} \|y\|_{H_\phi}^{1-2^{-n}}.$$

3. Niech A będzie algebrą Banacha z ciągłą inwolucją zaś ϕ będzie funkcjonałem dodatnim na A. Pokazać że $*$-reprezentacja odpowadająca ϕ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy ϕ nie da się przedstawić w postaci $\phi = a\phi_1 + b\phi_2$ z $a, b > 0$ i ϕ_i dodatnimi, nie będącymi wielokrotnościami ϕ (innymi słowy, ϕ jest elementem extremalnym stożka funkcjonałów dodatnich).

4. Niech A będzie C^*-algebrą z jedynką, zaś I bedzie podprzestrzenią w A niezmienniczą na $*$ i taką że $\inf_{x \in I} \|1 - x\| = 1$. Funkcjonał ϕ definiujemy w ten sposób że na I jest równy 0, zaś $\phi(1) = 1$. Następnie rozszerzamy go z zachowaniem normy na A, tak by $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$. Pokazać że tak rozszerzony ϕ jest funkcjonałem dodatnim na A. Jeśli I jest ideałem dwustronnym, to leży on w jądrze reprezentacji odpowiadającej ϕ. Jeśli J jest nietrywialnym ideałem lewostronnym to $I = \mathrm{lin}\{x^*x : x \in J\}$ spełnia warunek wyżej zaś odpowedni funkcjonał dodatni znika na J. Ponadto istnieje funkcjonał ekstremalny w stożku funkcjonałow dodatnich znikający na J. Innymi słowy, istnieje $*$-reprezentacja nieprzywiedlna ρ algebry A i wektor v takie że $Jv = 0$.

5. Niech ρ będzie reprezentacją unitarną $\mathbb{R}^n$ na ośrodkowej przestrzeni Hilberta W. Pokazać że istnieje miara μ na $\mathbb{R}^n$, przestrzeń Hilbera V i izometryczne włożenie $\iota : W \mapsto L^2(\mu, V)$, takie że ι *splata* ρ (splata ozancza że $\iota\rho(x) = \eta(x)\iota$) i poniżej zdefiniowaną reprezentację η:

$$(\eta(x)f)(y) = \exp(i\langle x, y \rangle) f(y).$$

ι można wybrać tak by $V = l^2$, zaś obraz ι miał postać $\{f : f(x) \in V_x\}$ z przestrzenią V_x składającą się z wektorów postaci $(a_1, a_2, \ldots, a_{N(x)}, 0, \ldots)$ gdzie

N jest funkcją μ-mierzalną, która może przyjmować wartość ∞ ($N(x) = \infty$ oznacza że $V_x = l^2$). Klasa równoważności μ i N nie zależy od wyboru ι (tzn. $\mu_{\iota_1} = f\mu_{\iota_2}$, i $\{x : N_1(x) \neq N_2(x)\}$ jest miary 0). Ponadto każdy operator komutujący w wszystkimi $\rho(x)$ ma postać

$$(Tf)(x) = U(x)f(x)$$

gdzie U jest μ-mierzalną funkcją o wartościach operatorowoch (mierzalność jest względem topologii mocnej zbieżności operatorów).

6. Na grupie "ax + b" mnożenie zadajemy wzorem:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, e^{-x_2}y_1 + y_2)$$

Niech N będzie podgrupą elementów postaci $(0, y)$, zaś ρ unitarną reprezentacją nieprzywiedlną grupy "ax + b" na przestrzni Hilberta H, nietrywialną na N. Rozważamy rozkład ρ obciętego do N jak w zadaniu 4. Pokazać że jako μ można wziąść miarę Lebesgua na półprostej, zaś krotność N jest równa 1. ρ jest równoważna z reprezentacją postaci

$$\rho(x, y)f(s) = \exp(ikye^{x+s})f(x + s)$$

na $L^2(\mathbb{R})$ gdzie $k = 1$ lub $k = -1$. Ponadto obraz p_t przez ρ nie jest operatorem zwartym.

7. Niech A będzie C^*-algebrą (którą utożsamiamy z podalgebrą algebry operatorów na przestrzeni Hilberta), a I ideałem lewostronnym w A. Pokazać że dla funkcji ciągłej f znikającej w 0 i samosprzężongo $x \in I$ mamy $f(x) \in I$. Ponadto jeśli I jest ideałem dwustronnym i $x \in I$ to $x^* \in I$ (czyli I jest $*$-ideałem).

Wskazówka: $|x| = (x^*x)^{1/2}$, $x^* = \lim(|x| + s)^{-1}|x|x^*$.

8. Niech A będzie algebrą operatorów zwartych na H. Pokazać że A nie ma nietrywialnych domkniętych ideałów dwustronnych, zaś każdy maksymalny ideał lewostronny jest postaci $I_v = \{a \in A : av = 0\}$ dla pewnego $v \in H$. Wywnioskować stąd że jedyną nieprzywiedlną $*$-reprezentacją A jest reprezentacja naturalna.

Wskazówka: Zadanie 7 sprowadza problem do operatorów skończenie wymiarowych.