# 1 Operatory pseudoróżniczkowe

Symbolem rzędu $k$ nazywamy funkcję na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ spełniającą:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\omega^\beta a(x,\omega)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\omega|)^{-|\beta|}$$

Operatorem pseudoróżniczowym nazywamy operator postaci

$$a(x,D)f = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \exp(i\langle x,\omega\rangle) a(x,\omega)\hat{f}(\omega)d\omega$$

gdzie

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x)\exp(-i\langle x,\omega\rangle)dx$$

jest transformacją Fouriera $f$.

Przykłady: pole wektorowe, rzędu 1

$$a(x,\omega) = \sum_j i f_j(x)\omega_j$$

mnożenie przez funkcję, rzędu 0

$$a(x,\omega) = f(x)$$

potęgi laplasianu

$$a(x,\omega) = (1+|\omega|^2)^s$$

Niech $E_s$ będzie operatorem pseudoróżniczkowym z symbolem $a(x,\omega) = (1+|\omega|^2)^{s/2}$. Dla $s > 0$ definujemy przestrzeń Sobolewa $H(s)$ jako zbiór funkcji z $L^2$ dla których poniższa norma jest skończona:

$$\|f\|_{H(s)}^2 = \|E_s f\|^2 = c_n \int |\hat{f}|^2(\omega)(1+|\omega|^2)^s d\omega.$$

Dla $s < 0$ definujemy przestrzeń Sobolewa jako przestrzeń dualną do $H(-s)$, jest ona przestrzenią dystrybucji (powyższy wzór na normę zachowuje sens).

**Lemat 1.1** *(Sobolewa): Dla $s > n/2$ przestrzeń Sobolewa jest zawarta w $C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Piszemy że $A \in Op(s)$ jeśli $A$ jest operatorem pseudoróżniczkowym rzędu $s$. Własności:

- Jeśli $A \in Op(l_1)$, $B \in Op(l_2)$ to $AB \in Op(l_1+l_2)$, $[A,B] \in Op(l_1+l_2-1)$, $A^* \in Op(l_1)$.
- Jeśli $A \in Op(l)$ to $A$ jest operatorem ograniczonym z $H(s)$ do $H(s+l)$. W szczególności operatory rzędu 0 są ograniczone na $L^2$.
- dla $l \in \mathbb{R}$ operator $E_l$ jest izometrią $H(s+l)$ z $H(s)$

Uwaga: Były i są badane bardzo ogólne klasy operatorów pseudoróżniczkowych. Powysza definicja definiuje dość wąską, ale bardzo pożyteczną podklasę.

## 2 Lemat Kohna

Zakładamy że $P = \sum_{i=1}^{n}(-Q_i^2 + A_iQ_i) + Q_0 + A_0$ gdzie $Q_i$ są antysymetrycznymi operatorami pseudoróżniczkowymi rzędu 1, zaś $A_i$ są operatorami pseudoróżniczkowymi rzędu 0.

**Lemat 2.1** *Istnieje stała $C$ taka że dla $f \in C_c^\infty$*

$$\sum_{i=1}^{n} \|Q_i f\|_{L^2}^2 \le C(\Re(\langle Pf, f\rangle) + \|f\|_{L^2}^2)$$

*i*

$$\|E_{-1/2}Q_0 f\|_{L^2} \le C(\|Pf\|\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})$$

P.

$$\langle Pf, f\rangle = \sum_{i=1}^{n}(\langle Q_i f, Q_i f\rangle + \langle A_i Q_i f, f\rangle) + \langle Q_0 f, f\rangle + \langle A_0 f, f\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|Q_i f\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n}\langle A_i Q_i f, f\rangle + \langle Q_0 f, f\rangle + \langle A_0 f, f\rangle$$

Dalej

$$|\langle A_0 f, f\rangle| \le C\|f\|_{L^2}^2,$$
$$|\langle A_i Q_i, f\rangle| \le C\|Q_i f\|_{L^2}\|f\|_{L^2}$$

Ponieważ $Q_0$ jest antysymetryczny, więc

$$\Re(\langle Q_0 f, f\rangle) = -\Re(\langle f, Q_0 f\rangle) = -\Re(\langle Q_0 f, f\rangle)$$

czyli $\Re(\langle Q_0 f, f\rangle) = 0$. Łącznie

$$\sum_{i=1}^{n} \|Q_i f\|_{L^2}^2 \le \Re(\langle Pf, f\rangle) + C(\sum_{i=1}^{n} \|Q_i f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})\|f\|_{L^2}$$

$$\le \Re(\langle Pf, f\rangle) + (1/2)\sum_{i=1}^{n} \|Q_i f\|_{L^2}^2 + (nC^2 + C)\|f\|_{L^2}^2$$

gdzie w ostatniej nierówności zastąpiliśmy średnią geometryczną przez arytmetyczną. Teraz

$$(1/2)\sum_{i=1}^{n} \|Q_i f\|_{L^2}^2 \le \Re(\langle Pf, f\rangle) + (nC^2 + C)\|f\|_{L^2}^2$$

co daje pierwszą część lematu.

Chcemy teraz dostać drugą część. Piszemy

$$\langle Pf, E_{-1}Q_0 f\rangle = \langle E_{-1/2}Q_0 f, E_{-1/2}Q_0 f\rangle + \langle A_0 f, E_{-1}Q_0 f\rangle$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\langle A_i Q_i f, E_{-1}Q_0 f\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle Q_i^2 f, E_{-1}Q_0 f\rangle$$

Ponieważ $E_{-1}Q_0 f$ jest rzędu 0 to

$$|\langle A_0 f, E_{-1}Q_0 f\rangle| \leq C\|f\|_{L^2}^2,$$

$$|\langle Pf, E_{-1}Q_0 f\rangle| \leq C\|Pf\|_{L^2}\|f\|_{L^2} \leq C(\|Pf\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2})$$

Na mocy pierwszej części mamy oszacowane $Q_i f$ dla $i = 1, \ldots, n$, więc

$$|\langle A_i Q_i f, E_{-1}Q_0 f\rangle| \leq C\|Q_i f\|_{L^2}\|f\|_{L^2} \leq C'(\|Pf\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2).$$

Dalej, dla $i = 1, \ldots, n$,

$$-\langle Q_i^2 f, E_{-1}Q_0 f\rangle = \langle Q_i f, Q_i E_{-1}Q_0 f\rangle$$

$$= \langle Q_i f, E_{-1}Q_0 Q_i f\rangle + \langle Q_i f, [Q_i, E_{-1}Q_0] f\rangle$$

czyli

$$|\langle Q_i^2 f, E_{-1}Q_0 f\rangle| \leq C(\|Q_i f\|_{L^2}^2 + \|Q_i f\|_{L^2}\|f\|_{L^2})$$

$$\leq C_1(\|Q_i f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2) \leq C_2(\|Pf\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2)$$

Łącznie daje to żądane oszacowanie na $\langle E_{-1/2}Q_0 f, E_{-1/2}Q_0 f\rangle = \|E_{-1/2}Q_0 f\|_{L^2}^2$.
□

Niech

$$V_1 = \mathrm{lin}\{\mathrm{Q_i}, \mathrm{i} = 0, .., \mathrm{n}\}$$

$$V_2 = [V_1, V_1] + \mathbb{R}Q_0$$

$$V_{i+1} = [V_1, V_i] + [V_{i-1}, Q_0].$$

Zauważmy że ze względu na wzór

$$[[A, B], C] = [A, [B, C]] + [[A, C], B] = [A, [B, C]] - [B, [A, C]]$$

dowolny iterowany komutator operatorów $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ jest kombinacją liniową elementów $V_i$.

**Lemat 2.2** *Niech $P$ będzie jak wyżej. Dla $Y \in V_i$ istnieje stała $C_Y$ taka że zachodzi*

$$\|Yf\|_{H(2^{-i+1}-1)} \leq C_Y(\|Pf\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})$$

*dla dowolnego $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

P: Dowód jest indukcyjny. Dla $i = 1$ teza wynika bezpośrednio z 2.1, bo $H(2^{-i+1} - 1) = H(0) = L^2$. Pokażemy teraz że z tezy dla $i$ wynika teza dla teza dla $[V_1, V_i]$. Dowolny element z $[V_1, V_i]$ jest kombinacją liniową elementów postaci $[Q_i, Q]$ z $Q \in V_i$, a więc wystarczy oszacować

$$\|[Q_i, Q]f\|_{H(2^{-(i+1)+1}-1)} = \|E_{\epsilon/2-1}[Q_i, Q]f\|_{L^2}$$

gdzie $\epsilon = 2^{-i+1}$. Piszemy:

$$\|E_{\epsilon/2-1}[Q_i, Q]f\|_{L^2}^2 = \langle E_{\epsilon/2-1}[Q_i, Q]f, E_{\epsilon/2-1}[Q_i, Q]f\rangle$$

$$= \langle [Q_i, Q]f, E_{\epsilon-2}[Q_i, Q]f\rangle = \langle [Q_i, Q]f, E_{\epsilon-1}Af\rangle$$

$$= \langle Q_i Q f, E_{\epsilon-1} A f\rangle - \langle Q Q_i f, E_{\epsilon-1} A f\rangle$$

gdzie $A = E_{-1}[Q_i, Q]$ jest rzędu 0. Następnie:

$$\langle Q_i Q f, E_{\epsilon-1} A f\rangle = -\langle Q f, Q_i E_{\epsilon-1} A f\rangle$$

$$= -\langle E_{\epsilon-1} Q f, A Q_i f\rangle - \langle Q f, [Q_i, E_{\epsilon-1} A] f\rangle$$

$$= -\langle E_{\epsilon-1} Q f, A Q_i f\rangle - \langle B Q f, f\rangle$$

gdzie $B = [Q_i, E_{\epsilon-1} A]^*$ jest rzędu $\epsilon - 1$.

Teraz:

$$|\langle E_{\epsilon-1} Q f, A Q_i f\rangle| \leq \|E_{\epsilon-1} Q f\|_{L^2} \|A Q_i f\|_{L^2}$$

$$\leq C_A \|Q f\|_{H(\epsilon-1)} \|Q_i f\|_{L^2} \leq C_A C_Q C_i (\|P f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})^2$$

gdzie w przedostatniej nierówności skorzystaliśmy z ograniczoności $A$, a w ostatniej użyliśmy założenie indukcyjne.

Podobnie:

$$|\langle B Q f, f\rangle| \leq \|B Q f\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \leq C_B \|Q f\|_{H(\epsilon-1)} \|f\|_{L^2}$$

$$\leq C_B C_Q (\|P f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})^2$$

Dalej:

$$\langle Q Q_i f, E_{\epsilon-1} A f\rangle = -\langle Q_i f, E_{\epsilon-1} A Q f\rangle - \langle Q_i f, [Q, E_{\epsilon-1} A] f\rangle$$

$$= -\langle Q_i f, E_{\epsilon-1} A Q f\rangle - \langle D Q_i f, f\rangle$$

gdzie $D = [Q, E_{\epsilon-1} A]^*$ jest rzędu $\epsilon - 1$. Znowu:

$$|\langle Q_i f, E_{\epsilon-1} A Q f\rangle| \leq \|Q_i f\|_{L^2} \|E_{\epsilon-1} A Q f\|_{L^2}$$

$$\leq C' \|Q_i f\|_{L^2} \|Q f\|_{H(\epsilon-1)} \leq C' C_i C_Q (\|P f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})^2$$

gdzie w przedostaniej nierówności użyliśmy ograniczoności $A$ na $H(\epsilon - 1)$ a w ostatnie założenie indukcyjne. Ponadto

$$|\langle Q_i f, D f\rangle| \leq C'' \|Q_i f\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \leq C'' C_i (\|P f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})^2$$

Łącznie powyższe nierówności pokazują że

$$\|E_{\epsilon/2-1}[Q_i, Q] f\|_{L^2}^2 \leq C_{[Q_i,Q]}^2 (\|P f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})^2$$

co daje oszacowanie dla $[V_1, V_i]$.

Teraz checemy oszacować elementy $[Q_0, V_{i-1}]$. Podobnie jak wyżej element z $[Q_0, V_{i-1}]$ jest kombinacją liniową elementów postaci $[Q_0, Q]$ gdzie $Q \in V_{i-1}$ więc jak w pierwszej części dostaniemy

$$\|[Q_0, Q]\|_{H(\epsilon/2-1)}^2 \leq |\langle Q f, Q_0 E_{\epsilon-1} A f\rangle| + |\langle Q_0 f, Q E_{\epsilon-1} A f\rangle|$$

Zauważmy że szacowanie obu członów sprowadza się do oszacowania

$$|\langle Q_0 f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle|$$

gdzie $A_{\epsilon-1}$ jest operatorem rzędu $\epsilon - 1$. Następnie

$$\langle Q_0 f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle = \langle P f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle - \langle P_1 f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle$$

gdzie $P_1 = P - Q_0$. Oczywiście

$$|\langle P f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle| \leq C \|P f\|_{L^2} \|Q f\|_{H(\epsilon-1)}$$

co jest oszacowane z założenia indukcyjnego. A więc pozostaje oszacować

$$\langle P_1 f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle Q_i^2 f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle A_i Q_i f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle + \langle A_0 f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle.$$

Człon z $A_0$ i człony z $A_i Q_i$ szacujemy bezpośrednio przez normy. Pozostają człony z $Q_i^2$:

$$|\langle Q_i^2 f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle| = |\langle Q_i f, Q_i A_{\epsilon-1} Q f\rangle| \leq \|Q_i f\|_{L^2} \|Q_i A_{\epsilon-1} Q f\|_{L^2}$$

Następnie, na mocy 2.1

$$\sum_{i=1}^{n} \|Q_i A_{\epsilon-1} Q f\|_{L^2}^2 \leq C(\Re(\langle P A_{\epsilon-1} Q f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle) + \|A_{\epsilon-1} Q f\|_{L^2})$$

Mamy $P A_{\epsilon-1} Q f = A_{\epsilon-1} Q P f + [P, A_{\epsilon-1} Q] f$ a więc

$$\begin{aligned} |(\langle P A_{\epsilon-1} Q f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle| &\leq |\langle A_{\epsilon-1} Q P f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle| + |\langle [P, A_{\epsilon-1} Q] f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle| \\ &= |\langle P f, B_{2\epsilon-1} Q f\rangle| + |\langle [P, A_{\epsilon-1} Q] f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle| \end{aligned}$$

gdzie $B_{2\epsilon-1} = Q^* A_{\epsilon-1}^* A_{\epsilon-1}$ jest rzędu $2\epsilon - 1$. Jako że $Q \in V_{i-1}$, to z założenia indukcyjnego

$$|\langle P f, B_{2\epsilon-1} Q f\rangle| \leq C \|P f\|_{L^2} \|Q f\|_{H(2\epsilon-1} \leq C'(\|P f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2).$$

A więc pozostaje oszacowanie członu z $[P, A_{\epsilon-1} Q]$. Rozpisując $P$ widać że $A_0$ i wyrazy $A_i Q_i$ nie sprawiają problemu, bo komutatory są rzędu $\epsilon$ co można przerzucić na $Q$. Pozostaje oszacować $[Q_i^2, A_{\epsilon-1} Q]$:

$$[Q_i^2, A_{\epsilon-1} Q] = Q_i [Q_i, A_{\epsilon-1} Q] + [Q_i, A_{\epsilon-1} Q] Q_i = 2[Q_i, A_{\epsilon-1} Q] Q_i + [Q_i, [Q_i, A_{\epsilon-1} Q]]$$

Jako że $B'_\epsilon = [Q_i, [Q_i, A_{\epsilon-1} Q]]$ jest rzędu $\epsilon$ to

$$|\langle B'_\epsilon f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle| = |\langle f, B''_{2\epsilon-1} Q f\rangle| \leq C \|f\|_{L^2} \|Q f\|_{H(2\epsilon-1)}$$

co już się rutynowo szacuje. Wreszcie $D_\epsilon = [Q_i, A_{\epsilon-1} Q]$ jest rzędu $\epsilon$ więc

$$|\langle D_\epsilon Q_i f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle| = |\langle Q_i f, D'_{2\epsilon-1} Q f\rangle| \leq C \|Q_i f\|_{L^2} \|Q f\|_{H(2\epsilon-1)}$$

co też się rutynowo szacuje i kończy krok indukcyjny. □

Komentarz: Druga część lematu wygląda dość pokrętnie. Kluczem jest to że w $\langle P f, A_{\epsilon-1} Q f\rangle$ człon z $Q_0$ odgrywa istotną rolę, zaś w $\langle P f, Q^* A_{\epsilon-1}^* A_{\epsilon-1} Q f\rangle$ ze względu na antysymetrię człon z $Q_0$ można pominąć. Przy tym człony kwadratowe drugiego wyrażenia są większe od członów kwadratowych pierwszego.

# 3 Twierdzenie Hörmandera

Dla $U$ będącego podzbiorem otwartym $\mathbb{R}^m$ przestrzeń $H(s,U)$ definujemy jako przestrzeń sprzężoną do $H_0(-s,U)$ gdzie $H_0(-s,U)$ jest domknięciem (w $H(-s)$) podzbioru dystrybucji z $H(-s)$ o nośniku zawartym w $U$.

Zakładamy że $L = -\sum_{i=1}^n X_i^2 + X_0$ gdzie $X_i$, $i = 0, \dots, n$ są gładkimi polami wektorowymi na $\mathbb{R}^m$ takimi że ich iterowane komutatory rozpinają przestrzeń styczną.

**Twierdzenie 3.1** *Dla dowolnych otwartych $U \subset V$ takich ze domknięcie $U$ jest podzbiorem zwartym $V$ i $l > 0$, $s \in \mathbb{R}$ istnieją $C$ i $k$ takie że dla dowolnej dystrybucji $f$ mamy*

$$\|f\|_{H(s+l,U)} \leq C(\|L^k f\|_{H(s,V)} + \|f\|_{H(s,V)})$$

*przy tym lewa strona jest skończona o ile prawa strona jest skończona.*

P. Zauważmy że wystarczy pokazać że dla $\phi, \psi \in C_c^\infty$ takich że $\psi = 1$ w otoczeniu nośnika $\phi$ zachodzi

$$\|\phi f\|_{H(s+\epsilon)} \leq C(\|\psi L f\|_{H(s)} + \|\psi f\|_{H(s)})$$

W dowodzie możemy zakładać że pola $X_i$ są antysymetryczne, w razie potrzeby zastępując je operatorami rzędu 1 postaci $(X_i + X_i^*)/2$ i dodając człony rzędu 1, tzn.

$$L = \sum_{i=1}^n (-X_i^2 + A_i X_i) + X_0 + A_0$$

gdzie $A_i$ są odpowiednimi funkcjami (dla nas jest ważne że są to operatory pseudoróżniczkowe rzędu 0).

Niech $P = E_s \psi^4 L E_{-s}$ i $Q_i = \psi X_i \psi$. Pokażemy że $P$ ma postać jak $L$ wyżej, tyle że $X_i$ są zastąpione przez $Q_i$ i oczywiści $A_i$ są inne. Mianowicie, mamy

$$\psi^4 X_i^2 = \psi^3 X_i \psi X_i + \psi^3 [\psi, X_i] X_i$$

$$= \psi^3 X_i \psi X_i + \psi^2 [\psi, X_i] \psi X_i + \psi^2 [\psi, [\psi, X_i]] X_i$$

$$= \psi^3 X_i \psi X_i + \psi [\psi, X_i] \psi^2 X_i + A$$

gdzie $A = \psi[\psi, [\psi, X_i]] \psi X_i + \psi^2 [\psi, [\psi, X_i]] X_i$ jest rzędu 0. Następnie

$$\psi[\psi, X_i]\psi^2 X_i = \psi[\psi, X_i]\psi X_i \psi + \psi[\psi, X_i]\psi[\psi, X_i] = BQ_i + A'$$

z $A'$ i $B$ rzędu 0. Podobnie

$$\psi^3 X_i \psi X_i = \psi^2 X_i \psi^2 X_i + \psi^2 [X_i, \psi] \psi X_i$$

$$= \psi^2 X_i \psi^2 X_i + \psi[\psi, X_i]\psi^2 X_i + \psi[\psi, [\psi, X_i]] X_i$$

$$= \psi^2 X_i \psi^2 X_i + \psi[\psi, X_i]\psi X_i \psi + \psi[\psi, X_i]\psi[\psi, X_i] + A''$$

$$= \psi^2 X_i \psi^2 X_i + B' Q_i + A'''$$

gdzie $B'$ i $A'''$ są rzędu 0. Kontynuując to postępowanie dostaniemy

$$\psi^4 X_i^2 = Q_i^2 + B_i Q_i + B_i'$$

gdzie $B_i$ i $B_i'$ są rzędu 0. Następnie

$$E_s\psi^4 X_i^2 E_{-s} = E_s Q_i^2 E_{-s} + E_s B_i Q_i E_{-s} + E_s B_i' E_{-s}$$

i

$$E_s Q_i^2 E_{-s} = Q_i E_s Q_i E_{-s} + [E_s, Q_i] Q_i E_{-s}$$
$$= Q_i^2 + Q_i E_s [Q_i, E_{-s}] + [E_s, Q_i] E_{-s} Q_i + [E_s, Q_i][Q_i, E_{-s}]$$
$$Q_i^2 + (E_s[Q_i, E_{-s}] + [E_s, Q_i])Q_i + [Q_i, E_s[Q_i, E_{-s}]] + [E_s, Q_i][Q_i, E_{-s}]$$

Teraz

$$E_s\psi^4 X_i^2 E_{-s} = Q_i^2 + A_i Q_i + A_i'$$

gdzie

$$A_i = E_s[Q_i, E_{-s}] + [E_s, Q_i] + E_s B_i E_{-s},$$
$$A_i' = E_s B_i [Q_i, E_{-s}] + [Q_i, E_s[Q_i, E_{-s}]] + [E_s, Q_i][Q_i, E_{-s}]$$

przy tym $A_i$ i $A_i'$ są rzędu 0. Łącznie

$$P = \sum_{i=1}^{n} (-Q_i^2 + A_i Q_i) + A_0$$

a więc na mocy 2.1

$$\|Q_i f\|_{L^2} \leq C(\|Pf\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})$$

dla $f \in C_c^\infty$. Ponieważ komutatory $X_i$ generują przestrzeń styczną, na mocy lematu Kohna 2.2 otrzymujemy

$$\|\phi f\|_{H(\epsilon)} \leq C(\|Pf\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})$$

dla $f \in C_c^\infty$. To prawie koniec, ale my potrzebujemy to dla $f \in L^2$. Aby to otrzymać zauważmy że w rozumowaniu wyżej zamiast funkcji jako $\psi$ możemy brać operatory postaci $\eta K_t \eta$ gdzie $K_t$ jest operatorem pseudoróżniczkowym z symbolem zależym tylko od $\omega$,

$$K_t = a_t(x, D)$$

gdzie $a_t(x, \omega) = h(t\omega)$ zaś $h$ jest funcją gładką o nośniku zwartym równą 1 w pewnym otoczeniu 0. Łatwo sprawdzić że $K_t$ jest operatorem rzędu $-1$ (a także dowolengo innego rzędu ujemnego bo odwzorowuje dowolną przestrzeń $H(s)$ w funkcje gładkie), przy tym $\lim K_t f = f$ w $H(s)$ dla $t$ dążącego do 0. Tak zregularyzowany $P$ jest operatorem ograniczonym na $L^2$, więc przez gęstość nierówności możemy rozszerzyc z funkcji gładkich na całe $L^2$. Podobnie w lemacie Kohna. Ponieważ stałe w oszacowanich nie zależą od $t$ to przechodząc z $t$ do zera otrzymamy oszacowanie dla $f \in L^2$. Teraz piszemy

$$\|\phi f\|_{H(s+\epsilon)} = \|E_s \phi f\|_{H(\epsilon)} \leq \|\phi E_s f\|_{H(\epsilon)} + \|[E_s, \phi] f\|_{H(\epsilon)}$$
$$\leq C(\|P E_s f\|_{L^2} + \|E_s f\|_{L^2}) + C_1 \|f\|_{H(s)}$$
$$= C\|E_s \psi^4 L f\|_{L^2} + (C + C_1)\|f\|_{H(s)}$$
$$= C\|\psi^4 L f\|_{H(s)} + (C + C_1)\|f\|_{H(s)}.$$

Biorąc zamiast $f$ dystrubucję $uf$ gdzie $u$ jest gładkie takie że $u = 1$ na nośniku $\psi$ otrzymamy

$$\|\phi f\|_{H(s+\epsilon)} \leq C\|\psi^4 Lf\|_{H(s)} + (C + C_1)\|uf\|_{H(s)}$$
$$\leq C_2(\|uLf\|_{H(s)} + \|uf\|_{H(s)})$$

□

Komentarz bibliograficzny: dowód twierdzenia Hörmandera jest dostępny w książkach poświęconych operatorom pseudoróżniczkowym, np. w [2] jest w rozdziale 22.2, zaś w [3] w rozdziale 15.1. Dowód wariantu twierdzenia Hörmandera dla operatorów wyższego rzędu jest w rozdziale drugim mojej pracy [1].

# Literatura


[1] W. Hebisch, Estimates on the semigroups generated by left invariant operators on Lie groups, *J. Reine Angew. Math.* 423 (1992), 1-45.

[2] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators III, Springer 1985.

[3] M. Taylor, Pseudodifferential operators, Princeton University Press, 1981.