

### Zadanie dodatkowe

Notacja:  $\Re(z)$  oznacza część rzeczywistą  $z$ ,  $\Im(z)$  oznacza część urojoną  $z$ .

Niech

$$\phi(z) = \log\left(\frac{z}{1 + \sqrt{1 + z^2}}\right) + \sqrt{1 + z^2}$$

Oblicz pochodną  $\phi$ . Uzasadnij że  $\phi$  jest dobrze zdefiniowane dla  $\Re(z) \geq 0$ ,  $z \neq 0$ . Uzasadnij że  $\phi$  odwzorowuje  $\{z : \Re(x) \geq 0, z \neq 0\}$  w sumę półpłaszczyzny  $\Re(z) \geq 0$  z pasem  $|\Im(z)| \leq \pi/2$ . Uzasadnij że dla  $\Re(z) \geq 0$ ,  $z \neq 0$ ,  $\phi$  jest różnowartościowe.

Wskazówka: Popatrz na zachowanie  $\phi$  dla  $\Re(z) = 0$  oraz na zachowanie dla dużych  $|z|$ .