1. Sprawdzić że podane na wykładzie realizacje grupy Heisenberga są izomorficzne. Przypominam że pierwsza realizacja to $\mathbb{R}^3$ z mnożeniem zadanym wzorem $(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1))$ zaś druga to macierze postaci:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

2. Sprawdzić że wzór $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \exp(x_2) y_1 + y_2)$ zadaje na $\mathbb{R}^2$ strukturę grupy Liego. Pokazać że grupa ta jest izomorficzna z grupą przekształceń afinicznych prostej zachowujących orientację.

3. Niech $Aut(H)$ oznacza grupę automorfizmów grupy H, zaś A jest homomorfizmem z G w $Aut(H)$. Na produkcie grup G i H wprowadzamy mnożenie wzorem:

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, (A(g_2^{-1}) h_1) h_2)$$

Otrzymujemy w ten sposób grupę nazywaną produktem półprostym G i H (sprawdzić). Pokazać że jeśli G i H są grupami Liego i A jest odwzorowaniem gładkim (jako odwzorowanie z $G \times H$ w H) to produkt półprosty G i H jest grupą Liego.

4. Przestawić jako produkt półprosty następujące grupy: grupę przekształceń afinicznych na przestrzni euklidesowej, grupę isometrii przestrzni euklidesowej, grupę Heisenberga, grupę macierzy górno-trójkątnych (tzn. takich że wszyskie elementy poniżej diagonali są zerami).

5. Przestrzeń k-dżetów odwzorowań $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^n$ w punkcie 0 to przestrzeń ilorazowa przestrzeni wszystkich funkcji gładkich z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^n$ przez podprzestrzeń funkcji których $k+1$ pochodnych w 0 znika. Z definicji wynika że pochodne do rzędu k w 0 są dobrze zdefiniowane dla k-dżetów (nie zależą od wyboru reprezentantów). Pokazać że przestrzeń k-dżetów odwzorowań $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$ w punkcie 0 takich że wartość w 0 to 0 i pierwsza pochodna jest odwracalna ma naturalną strukturę grupy Liego (działaniem jest składanie (dżetów) odwzorowań).

6. Na $\mathbb{R}^n$ wprowadzamy topologie Zariskiego przyjmując że zbiory domkniete do dokładnie te zbiory które są zbiorami wspólnych zer układu wielomianów. Na podzborach $\mathbb{R}^n$ topologię Zariskiego wprowadzamy jako topologię podprzestrzeni. Pokazać że jeśli U jest zbiorem otwartym w topologii Zariskiego, f jest funkcją wymierną, taką że mianownik f jest różny od 0 na U to f jest ciągła w topologi Zariskiego (tzn. przeciwobrazy zbiorów domkniętch w topologi Zariskiego przez f są domknięte w topologi Zariskiego). Pokazać że jeśli na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wprowadzimy produkt toplogii Zariskiego to dodawanie będzie nieciągłe. Pokazać że jeśli grupa G jest podzbiorem domkniętym $\mathbb{R}^n$ w topologi Zariskiego zaś działania grupowe na G są zadane przez funkcje wymierne których mianowniki są różne od zera na G to mnożenie jest ciągłe z $G \times G$ z topologią Zariskiego odziedziczoną z $\mathbb{R}^{2n}$ w G (z topologią Zariskiego).