1. Niech Λ będzie układem pierwiastków zaś $\Delta \subset \Lambda_+$ bazą (układem pierwiastków prostych). Pokazać że jeśli dla $\alpha, \beta \in \Delta$ mamy $(\alpha, \beta) \neq 0$ to $(e_\alpha, e_\beta) \leq -1/2$.

2. Pokazać że diagram Coxetera (czy Dynkina) układu pierwiastków nie zawiera cykli (pokazać że prowadziłoby to do sprzeczności z dodatnią określonością formy).

3. Sprawdzić że algebra Liego grupy $SU(n)$ ma układ pierwiastków A_{n-1}.

Uwaga: Algebra Liego grupy $SO(2n+1)$ dla $n \geq 2$ ma układ pierwiastków B_n, $SO(2n)$ dla $n \geq 3$ ma układ pierwiastków D_n. Grupę $Sp(n)$ definiujemy jako podgrupę $SU(2n)$ składającą się z elementów komutujących z operatorem J zadanym wzorem $J(x, y) = (-y, x)$ dla $x, y \in \mathbb{C}^n$. $Sp(n)$ ma układ pierwiastków C_n dla $n \geq 2$.

Przypominam że klasą Schwartza $\mathcal{S}$ nazywamy zbiór funkcji na $\mathbb{R}^n$ taich że dla dowolnego multiindeksu α zarówno $x^\alpha f$ jak i $\partial^\alpha f$ jest ograniczone (te wielkości dają rodzinę półnorm zadających topologię (metrykę) na klasie Schwartza).

4. Niech H_n będzie algebrą Heisenberga, tzn. bazą H_n są elementy X_k, Y_k, $k = 1, \ldots, n$ i Z zaś $[X_k, Y_k] = Z$. Niech $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Definiujemy działanie H_n na klasie Schwartza wzorami: $X_k f = \partial_k f$, $Y_k = i\alpha x_k f$, $Zf = i\alpha f$. Sprawdzić że jest to dobrze zdefiniowane działanie. Pokazać że przy tym działaniu nie ma nietrywialnych domkniętych podprzestrzeni niezmienniczych, tzn. $\mathcal{S}$ z tym działaniem jest toplogicznie proste. Ponadto, dla różnych α te działania nie są równoważne.

Komentarz: Wiemy że skończenie wymiarowe moduły proste nad algebrą nilpotentną są jednowymiarowe. To zadanie ilustruje że dostaniemy nietrywialne nieskończenie wymiarowe moduły proste. Aby dostać moduł który jest algebraicznie prosty trzeba by wziąść podmoduł np. podmoduł cykliczy generowany przez funkcję Gaussa $\exp(-|x|^2)$, ale klasa Schwartza ma tą zaletę że w tym samym module mamy też działanie grupy.