Przypominam definicję algebry Liego: algebra Liego nad pierscieniem R to moduł nad R z operacją $[x, y]$ (nawiasem Liego) spełniającym:

$$[c_1x_1 + c_2x_2, y] = c_1[x_1, y] + c_2[x_2, y]$$

$$[x, c_1y_1 + c_2y_2] = c_1[x, y_1] + c_2[x, y_2]$$

$$[x, y] = -[y, x]$$

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [x, [y, z]]$$

Pierwsze dwa warunki to dwuliniowość, trzeci to antysymetria (w charakterystyce 2 należełoby pisać $[x, x] = 0$), zaś czwarty nosi nazwę tożsamości Jacobiego.

Przypominam że D jest różniczkowaniem algebry Liego A jeśli D jest R-liniowe i spełnia wzór Leibnitza: $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$.

1. Sprawdzić że jeśli A jest (raczej nieprzeminną) algebrą łączną nad R to A z nawiasem Liego wprowadzonym wzorem $[X, Y] = XY - YX$ jest algebrą Liego. (W szczególności algebra Liego grupy Liego tak jak definiowaliśmy ją na wykładzie jest algebrą Liego).

2. Sprawdzić że suma prosta algebr Liego A_1 i A_2 zdefinowana jako ich suma prosta jako modułów z nawiasem Liego po składowych $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$ jest algebrą Liego. Sprawdzić że jeśli B jest R-liniowym odwzorowaniem z A_1 w różniczkowania A_2 spełniającym $B([x, y]) = B(x)B(y) - B(y)B(x)$ (tzn. B jest homomorfizmem algebr Liego) to wzór

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], -(B(y_1))x_2 + (B(x_1))y_2 + [y_1, y_2])$$

zadaje nawias Liego na sumie prostej A_1 i A_2 jako modułów. Sumę prostą A_1 i A_2 jako modułów z takim nawiasem Liego nazywamy produktem półprostym algebr Liego. Oczywiście produktem półprosty zależy od wyboru odwzorowania B.

3. Pokazać że algebra Liego A jest produktem półprostym wtedy i tylko wtedy gdy A zawiera dwa podmoduły A_1 i A_2 takie że $A = A_1 \oplus A_2$ jako moduł, A_1 jest podalgebrą (tzn. dla $x, y \in A_1$ również $[x, y] \in A_1$) i dla $x \in A$, $y \in A_2$ mamy $[x, y] \in A_2$.

4. Wyznaczyć prawostronnie niezminnicze pola wektorowe na grupie macierzy ortogonalych 3×3. Dla tej grupy i grup z zadania 3 listy 2 wyznaczyć nawias Liego.

5. Pokazać że dla grup macierzowych nawias Liego jest zadany wzorem $[X, Y] = XY - YX$ gdzie XY i YX są iloczynami macierzy.

Wskazówka: Użyć wzór $Xf(x) = \partial_t f(x \exp(tX))|_{t=0}$ i najpierw pokazać że $[X, Y] = \partial_t\partial_s(\exp(tX)\exp(sY) - \exp(tY)\exp(tX))|_{s,t=0}$

6 Niech A będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią wektorową z bazą $X, Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$. Na A zadajemy nawias Liego wzorem $[X, Y_i] = -[Y_i, X] = Y_{i+1}$ zaś $[Y_i, Y_j] = 0$. Sprawdzić że to nam zadaje algebrę Liego i że A jest generowana przez X i Y_1 (tzn. najmniejsza podalgebra Liego A zawierająca X i Y_1 jest równa A).

Definicja: Algebra Liego $\mathbf{g}$ jest prosta jeśli jedyne podprzestrzenie $\mathbf{g}$ niezmiennicze na działanie wszystkich operatorów ad_x, $x \in \mathbf{g}$ to $\mathbf{g}$ i $\{0\}$.

7. Pokazać że następujące algebry Liego są proste: algebra Liego rzeczywistych (lub zespolonych) macierzy 2×2 o śladzie 0, algebra zespolonych macierzy antyhermitowskich 2×2 o śladzie 0, algebra rzeczywistych macierzy antysymetrycznych 3×3 o śladzie 0.

8. Niech $Df = \partial_x^2 f$, $Mf(x) = x^2 f(x)$, $Jf(x) = 2x(\partial_x f)(x) + f(x)$. Pokazać że operatory D, M, J rozpinają rzeczywistą algebrę Liego (z komutatorem jako nawiasem Liego). Podobnie iD, iM, J rozpinają rzeczywistą algebrę Liego. Sprawdzić że te dwie algebry są izomorficzne z algebrą macierzy 2×2 o śladzie 0.

Uwaga: $-M$ można traktować jako wektor styczny do półgrupy operatorów $T(t)f(x) = \exp(-tx^2)f(x)$ dla $t \geq 0$. Jednakże $T(t)$ jako operator na C^∞ jest odwracalne, ale nie jest operatorem odwracalnym na klasie Schwartza, więc M nie wyznacza podgrupy jednoparametrowej w grupie operatorów liniowych ciągłych na klasie Schwartza. Również D nie wyznacza podgrupy jednoparametrowej na klasie Schwartza (trudniejsze). iD, iM, J generują podgrupę trójwymiarową grupy operatorów liniowych ciągłych na klasie Schwartza, ale to wymaga dodatkowych wiadomości (transformacja Fouriera lub analiza funkcjonalna)

Klasą Schwartza nazywamy podprzestrzeń C^∞ taką że wszystkie półnormy $\phi_{n,k}(f) = \sup_x |x^n \partial_x^k f|$ dla naturalnych n i k są skończone.