1. Pokazać że jeśli rzeczywista algebra Liego A zawiera element x taki że ad_x ma niezerową rzeczywistą wartość własną, to zawiera też podalgebrę Liego izomorficzną z algebrą Liego grupy przekształceń afinicznych prostej (grupy 'ax + b').

2. Opisać (sklasyfikować) wszystkie rozwiązalne algebry Liego nad ciałami liczb rzeczywistych i zespolonych o wymiarze nie przekraczającym 3.

3. Pokazać że nieprzemienna rozwiązalna algebra Liego nad ciałem liczb rzeczywistych zawiera nieprzemienną podalgebrę wymiaru 2 lub 3.

Uwaga: Z twierdzeń o strukturze algebr wynika że teza zadania pozostaje prawdziwa jeśli się usunie założenie o rozwiązalności (ale nie znam prostego dowodu).

4. Pokazać że nieprzemienna algebra rozwiązalna nad ciałem liczb rzeczywistych która nie jest nilpotentna zawiera ideał taki że iloraz jest nieprzemienną algebrą wymiaru 2 lub 3.

5. Pokazać że algebra $\mathbf{su}(2)$ (algebra macierzy antyhermitowskich 2×2 o śladzie 0) nie zawiera rozwiązalnej podalgebry wymiaru większego niż 1. Wskazówka: Spójna rozwiązalna podgrupa zwartej grupy Liego jest przemienna.

6. Pokazać że jeśli algebra Liego G jest nilpotentna i $G/[G,G]$ jest generowane przez $x_1, \dots, x_n$ to $x_1, \dots, x_n$ także generują G.

7. Pokazać że nilpotentna algebra Liego ze skończonym zbiorem generatorów jest skończenie wymiarowa.

8. Opisać przemienne grupy Liego.

Przypominam definicję z poprzedniej listy.

Definicja: Algebra Liego $\mathbf{g}$ jest prosta jeśli jedyne podprzestrzenie $\mathbf{g}$ niezmiennicze na działanie wszystkich operatorów ad_x, $x \in \mathbf{g}$ to $\mathbf{g}$ i $\{0\}$.

9. Pokazać że jeśli G jest grupą Liego z prostą algebrą Liego, to istnieje k takie że dla każdego $x \in G$ który nie należy do centrum G dla F zadanego równością $F = A_G x = \{gxg^{-1} : g \in G\}$ zbiór $(FF^{-1})^k$ zawiera otoczenie e w G.

Wskazówka: F zawiera krzywą gładką.

10. Pokazać że jeśli G jest grupą Liego z prostą algebrą Liego, to każdy właściwy dzielnik normalny G jest zawarty w centrum G.

11. Pokazać że jeśli G jest grupą zwartą, U jest otoczeniem e w G, k jest liczbą naturalną, to istnieje otoczenie e V takie że $((A_G V)(A_G V)^{-1})^k \subset U$.

12. Pokazać że jeśli G_1 jest grupą Liego z prostą algebrą Liego zaś G_2 jest jest grupą zwartą to każdy (algebraiczny) homomorfizm z G_1 do G_2 jest ciągły.