1. Niech I będzie ideałem algebry Liego A nad ciałem K, zaś $x \in A$ elementem takim że A rozkłada się na sumę podprzestreni własnych ad_x. Dokładniej, definujemy $A_\lambda = \{v \in A : \mathrm{ad}_x(v) = \lambda v\}$ i zakładamy że $A = \oplus_\lambda A_\lambda$. Pokazać że $I = \oplus_\lambda (I \cap A_\lambda)$. Podobnie, jeśli mamy zbiór S operatorów, λ są funkcjami z S w K, $A_\lambda = \{v \in A : \forall_{x \in S} \mathrm{ad}_x(v) = \lambda(x) v\}$.

2. Dla algebry macierzy n na n opisać opisać wspólne podprzestrzenie własne (jak w drugiej części zadania 1) dla S będącego zbiorem macierzy diagonalnych. Podobnie, dla algebry macierzy antysymerycznych na ciałem liczb zespolonych i S będącego zbiorem macierzy z blokami postaci:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

na diagonali. λ jest tu dowolną liczbą rzeczywistą. Pozadiagonalne bloki są zerami.

3. Bazując na wyniku zadania 2 pokazać że algebra macierzy n na n o śladzie 0 jest prosta. Podobnie, algebra macierzy antysymetrycznych o śladzie 0 jest prosta.

4. Niech V będzie skończenie wymiarową podprzestrznią przestrzeni wielomianów na $\mathbb{R}^n$. Zakładamy że V jest zamknięta na przesunięcia. Pokazać że $\mathbb{R}^n \oplus V$ z komutatorem zadanym przez równości $[(v_1, 0), (v_2, 0)] = 0$, $(0, p_1), (0, p_2)] = 0$, $[(v, 0), (0, p)] = \partial_v p$ gdzie ∂_v jest pochodną kierunkową w kierunku v jest nilpotentną algebrą Liego. Wyznaczyć odpowiadającą jej grupę Liego.

Wskazówka: Ta algebra jest produktem półprostym.

5. Na przestrzeni V macierzy anyhermitowskich (tzn. takich że $A^* = -A$) 2 na 2 o śladzie 0 zadajemy iloczyn skalarny wzorem $(A, B) = Tr(AB^*)$ Sprawdzić że jeśli dla $g \in SU(2)$ zadamy działanie na V wzorem: $A \mapsto gAg^{1-}$ to to działanie daje homomorfizm z $SU(2)$ na spójną składową jedynki w grupie ortogonalnej przestrzeni V. To odwzorowanie ma jądro $I, -I$ (czyli jest dwukrotnym nakryciem).

6. Przestrzeń rzutowa $P(K, n)$ nad ciałem K to iloraz $K^{n+1} - 0$ w którym utożsamiamy x z λx dla dowolnego $\lambda \neq 0$. Macierze $n+1$ na $n+1$ nad K w naturalny sposób działają na $P(K, n)$. Wyznaczyć orbity działania $SL(2, \mathbb{R})$ i macierzy górnotrójkątnych na $P(\mathbb{C}, 1)$. Pokazać że macierze górnotrójkątne działają tranzytywnie na orbitach $SL(2, \mathbb{R})$ maksymalnego wymiaru.