1. Pokazać że algebra Liego A skończonej długości zawiera maksymalny ideał nilpotentny, tzn. taki ideał nilpotentny N że dowoly ideał nilpotentny A jest zawarty w N.

2. Pokazać że skończenie wymiarowy moduł prosty nad przemienną algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym K jest jednowymiarowy jako przestrzeń wektorowa nad K. Podać przykład modułu prostego wymiaru 2 nad jednowymiarową algebrą algebrą Liego nad $\mathbb{R}$.

3. Algebra Liego $\mathbf{sl}(2, \mathbb{R})$ jest generowana przez elementy H, X, Y takie że $H = [X, Y]$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$. Niech v_k, $k = 0, \ldots, m$ będzie bazą przestrzeni $m + 1$ wymiarowej przestrzeni V_m ($m \geq 1$). Sprawdzić że wzory $Hv_k = (2k - m)v_k$, $Xv_k = (m - k)v_{k+1}$, $Yv_k = kv_{k-1}$ zadają na V_m strukturę modułu Liego nad $\mathbf{sl}(2, \mathbb{R})$. Moduł ten jest izomorficzny z naturalnym działaniem $\mathbf{sl}(2, \mathbb{R})$ na wielomianach jednorodnych stopnia m. Ponadto moduł ten jest prosty.

4. Pokazać że dla danego n i k istnieje wolna algebra nilpotentna $N_{n,k}$ długości co najwyżej k generowana przez n elementów. Dokładniej, $N_{n,k}$ jest taką algebrą Liego że dla dowolnej nilpotentnej algebry Liego B długości co najwyżej k i odwzorowania h ze zbioru generatorów $\{x_1, \ldots, x_n\}$ w B istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\tilde{h} : N_{n,k} \mapsto B$ takie że $h(x_i) = \tilde{h}(x_i)$. Dla skończonego n algebra $N_{n,k}$ jest skończenie wymiarowa.

Uwaga: Nilpotentność jest kluczowa żeby dostać skończony wymiar. Mianowicie, algebra A z zadania 6 z listy 3 jest nieskończnie wymiarową rozwiązalną algebra Liego o dwu generatorach. Przy tyme $[A, A]$ jest algebrą przemienną (takie algebry nazywamy metaabelowymi).