1. Niech $A = \mathbb{R}^n \oplus \Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ gdzie Λ_2 jest drugą potęgą zewnętrzną. Na A definiujemy nawias Liego wzorem $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = (0, x_1 \wedge x_2)$. Pokazać że A jest izomorficzna z wolną nilpotentną algebrą Liego długości 2 o n generatorach.

2. Produkt wolny R-algebr Liego A_1 i A_2 definujemy jako taką R-algebrę Liego B z włożeniami $\iota_i : A_i \mapsto B$, $i = 1, 2$ że dla dowolnej R-algebry Liego C i dowolnych homomorfizmów R-algebr Liego $h_i : A_i \mapsto C$, $i = 1, 2$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm R-algebr Liego $h : B \mapsto C$, taki że $h_i = h \circ \iota_i$. Uogólnić defincję na dowolną, niekoniecznie skończoną rodzinę algebr. Pokazać że produkt wolny istnieje. Ponadto pokazać że produkt wolny odpowiedniej liczby kopii pierścienia R traktowanego jako R-algebra Liego z zerowym komutatorem spełnia naturalną definicję wolnej algebry Liego (sformułować tą definicję).

Porzypominam że jeśli pierścień przemienny z jedynką S jest algebrą nad R, zaś G jest R-algebrą Liego to $S \otimes_R G$ posiada naturalną strukturę S-algebry Liego (mówimy że $S \otimes_R G$ jest otrzymane z G przez rozszerzenie skalarów). Jeśli S jest modułem wolnym nad R to G można naturalnie utożsamić z podzbiorem $S \otimes_R G$ (w ogólym przypadku dostaniemy naturalne "włożenie" które nie musi być różnowartościowe).

3. Opisać strukturę $S \otimes_R G$ jeśli R to liczby rzeczywiste zaś S to liczby zespolone. W szczególności, co wyjdzie jeśli G to:

- algebra rzeczywistych macierzy 2×2 o śladzie 0
- algebra zespolonych macierzy 2×2 o śladzie 0
- algebra zespolonych macierzy antyhermitowskich 2×2 o śladzie 0

4. Niech p bedzie wielomianem nierozkładalnym nad $\mathbb{Q}$ stopnia n z najwyższym wyrazem 1. Macierz M_p wygląda następująco:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -p_0 \\ 1 & 0 & \dots & -p_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pokazać że w $\mathbb{Q}[x]/p\mathbb{Q}[x]$ istnieje baza taka że M_p odpowiada mnożeniu przez x, i że $\mathbb{Q}^n$ jest modułem prostym dla $\mathbb{Q}$-algebry łącznej A generowanej przez M_p zaś p jest wielomianem minimalnym dla M_p (tzn. $p(M_p) = 0$ i p jest wielomianem minimalnego stopnia o tej własności). Ponadto A jest ciałem.

Przypominam że dla R-algebry Liego L odwzorowanie $D : L \mapsto L$ które jest homomorfizmen R-modułów nazywamy różniczkowaniem jeśli dla dowolnych $x, y \in L$ zachodzi $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$.

5. Pokazać że ad odwzorowuje L na ideał w algebrze Liego różniczkowań.

6. Pokazać że jeśli D jest różniczkowaniem skończenie wymiarowej rozwiązalnej algebry Liego L nad ciałem charakterystyki 0 to dla dowolnego $x \in L$ operator ad_{Dx} jest nilpotentny.

Wskazówka: Algebra różniczkowań generowana przez D i L jest rozwiązalna.

Przypominam że algebrę Liego nazywamy półprostą jeśli nie zawiera nietrywialnych ideałów rozwiązalnych.

7. Pokazać że skończenie wymiarowa algebra półprosta nad ciałem charakterystyko 0 jest sumą prostą algebr prostych.

8. Niech V będzie skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem K algebraicznie domkniętym charakterystyki 0, L algebrą Liego endomorfizmów V. Zakładamy że V jest modułem prostym dla L i L nie zawiera operatora identycznościowego. Wtedy L jest półprosta.

Wskazówka: Powtórzyć fragment dowodu twierdzenia Liego.

9. Jeśli D jest różniczkowaniem skończenie wymiarowej algebry półprostej L nad ciałem charakterystyki 0, to istnieje $x \in L$ taki że $D = \mathrm{ad}_x$.

Wskazówka: Dla algebr prostych nad ciałem algebraicznie domkniętym wynika to z poprzedniego zadania.

10. Niech $\tilde{R} = R[X]/(X^2)$ (tzn. $\tilde{R}$ jest rozszerzeniem R o elemet x taki że $x^2 = 0$), L jest R-algebrą Liego i niech $\tilde{L} = \tilde{R} \otimes_R L$. Pokazać że jeśli D jest różniczkowaniem L, to wzór $A(s + xt) = s + x(t + D(s))$ gdzie $s, t \in L$ (zaś L utożsamiamy z podzbiorem $\tilde{L}$), zadaje automorfizm $\tilde{L}$. Ponadto, każdy automorfizm $\tilde{L}$ który jest tożsamością na $\tilde{L}/xL$ jest takiej postaci.