1. Pokazać że jeśli $N \subset A \subset L$, N jest podalgebrą Cartana w L, A jest podalgebrą L, to N jest podalgebrą Cartana w A.

2. Algebra Liego L (nad ciałem liczb rzeczywistych) ma bazę X, Y, Z, T, S z relacjami $[X,Y]=Z$, $[X,T]=T$, $[Y,S]=S$ (pozostałe komutatory elementów bazy to 0). Pokazać jeśli a,b są dowolnymi ustalonymi liczbami to podalgebra generowana przez elementy postaci $X+aT, Y+bS, Z$ jest podalgebrą Cartana w L. Ponadto każda podalgebra Cartana L jest takiej postaci.

3. Niech L będzie skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem nieskończonym i C będzie algebrą Cartana w L. Pokazać że $L = C + [L,L]$.

4. Niech L będzie rozwiązalną algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 i niech N będzie podalgebrą Cartana w L. Wiemy że

$$L = N \oplus \bigoplus_f L_f = N \oplus W$$

gdzie f są funkcjonałami pierwiastkowymi zaś L_f odpowiednimi podprzestrzeniami pierwiastkowymi. Każde f rozszerzamy z N na L kładąc $f(x)=0$ dla $x \in W$. Pokazać że tak rozszerzone f nie zależą od wyboru N.

5. Niech L będzie skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem nieskończonym i C będzie algebrą Cartana w L. Pokazać że istnieje $x \in C$ taki że $C = \{v \in L : \mathrm{ad}_x^{\dim(L)} v = 0\}$.

Nilradykałem $\mathbf{s}$ algebry Liego L nazywamy podzbiór L taki że każdy element $s \in \mathbf{s}$ działa jak zero w każdym L-module prostym tzn.

$$\mathbf{s} = \{s \in L : \forall_V \forall_{v \in V} V \text{ jest prosty} \implies sv = 0\}$$

6. Dla skończenie wymiarowej algebry L pokazać że:

- jeśli algebra L jest półprosta to $\mathbf{s} = \{0\}$
- $\mathbf{s}$ jest ideałem rozwiązalnym
- jeśli algebra L jest abelowa to $\mathbf{s} = \{0\}$
- $\mathbf{s} \subset [L,L]$
- jeśli L jest rozwiązalan nad ciałem charakterystyki 0 to $\mathbf{s} = [L,L]$