Zadania 1 do 9 dają dowód ważnego wzoru Bakera-Campbella-Hausdorffa. Część materiału pojawała się już na wykładzie i na ćwiczeniach, powtarzam to dla kompletności. Zadanie 2 to twierdzenie Poincarego-Birkhoffa-Wita.

1. Niech A będzie algebrą Liego która jest modułem wolnym z bazą $\{e_i\}_{i\in I}$ nad pierścieniem podstawowym R. Zakładamy że na I zadany jest porządek liniowy. Niech J będzie zbiorem niemalejących ciągów skończonych z I, tzn, elementów α postaci $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ gdzie $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$. Z definicji ciąg pusty jest elementem J. Niech M będzie modułem wolnym nad R generowanym przez J. Na M chcemy zdefiniować działanie A. Wystarczy to zrobić na bazach A i M. Działanie na bazie M określamy indukcyjnie względem długości elementu α bazy M. Jeśli α jest ciągiem pustym to $e_i\alpha = (i)$. Zakładając że zdefiniowaliśmy działanie na ciągach długości $n-1$ na ciągach długości n definujemy działanie następująco: jeśli $\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ i $i \leq i_1$ to $e_i\alpha = (i, i_1, i_2, \ldots, i_n)$, jeśli $i > i_i$ to piszemy $[e_i, e_{i_1}] = \sum_k c_k e_k$ i $e_i\alpha = e_{i_1}e_i(i_2, \ldots, i_n) + \sum_k c_k e_k(i_2, \ldots, i_n)$. Sprawdzić że:

- $e_i\alpha$ jest dobrze zdefiniowaną operacją
- powyższa definicja faktycznie zadaje działanie
- M z tym działaniem jest wolnym modułem Liego generowanym przez pojedyńczy element (ciąg pusty).

Przypominam że uniwersalna algebra obwiednia algebry Liego A jest zdefiniowana jako taka algebra łączna $E(A)$ z odwzorowaniem $\iota : A \mapsto E(A)$ które jest homomorfizmen z A w $E(A)$ traktowane jako algebra Liego (z komutatorem jako nawiasem Liego), że każdy homomorfizm h z A w algebrę łączną B traktowaną jako algebrę Liego jest postaci $h = g \circ \iota$ gdzie g jest homomorfizmem $E(A)$ w B (homomorfizm algber łacznych).

2. Pokazać że jeśli A jest jak w zadaniu wyżej to elementy postaci

$$\iota(e_{i_1})\iota(e_{i_2})\ldots\iota(e_{i_n})$$

gdzie $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$ stanowią bazę $E(A)$ (ciąg pusty daje jedynkę). W szczególności ι jest różnowartościowe.

Wskazówka: $E(A)$ odwzorowuje się w łączną algebrę endomorfizmów M traktowanego jako R moduł.

3. Niech G będzie grupą Liego z algebrą Liego L, i niech D będzie algebrą operatorów różniczkowych na G niezmienniczych na przesunięcia z prawej strony (mnożenie to składanie operatorów). Pokazać że algebra obwiednia $E(L)$ jest izomorficzna z D.

Wskazówka: Rozpatrzyć działanie elementów D na jednomiach w układzie wpółrzędnych.

4. Pokazać że jeśli L_1 i L_2 są algebrami Liego to $E(L_1 \oplus L_2)$ jest izomorficzne z produktem tensorowym $E(L_1) \otimes E(L_2)$ z działaniem po składowych.

5. Dla algebry przemiennej L algebra $E(L)$ jest izomorficzna z algebrą wielomianów (dokładniej z algebrą symetryczną).

6. Niech L będzie algebrą Liego nad R. Istnieje taki homomorfizm $\Lambda : E(A) \mapsto E(A) \otimes E(A)$ że dla każdego $x \in L$ mamy $\Lambda(\iota(x)) = \iota(x) \otimes 1 + 1 \otimes \iota(x)$. Ponadto, jeśli R jest ciałem charakterystyki 0 to $\iota(L) = \{y \in E(A) : \Lambda(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y\}$.

Wskazówka: Λ odpowiada diagonalnemu włożeniu L w $L \oplus L$. Drugą część pokazać najpierw dla algebry przemiennej, potem pokazać że dla nieprzemiennego L odwzorowanie Λ różni się tylko o człony niższego rzędu.

Wielokrotny komutator $[x_1, x_2, \dots, n_n]$ definujemy rekurencyjnie jako

$$[x_1, [x_2, \dots, n_n]].$$

7. Niech N będzie modułem wolnym nad R zaś $T(N)$ algebrą tensorową (wolną algebrą łączną) nad N. Niech L będzie podalgebrą Liego $T(N)$ generowaną przez N. Pokazać że L jest wolną algebrą Liego generowaną przez N zaś $T(N)$ jest jej uniwersalną algebrą obwiednią. Niech D będzie odzorowaniem $T(N)$ w $T(N)$ które na tensorach rzędu n jest zadane wzorem $D(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = [x_1, \dots, x_n]$ gdzie $x_i \in N$ zaś $[x_1, \dots, x_n]$ to wielokrotny komutator. Pokazać że dla $y \in L$ które są jednorodne rzędu n mamy $D(y) = ny$.

Wskazówka: W drugiej części najpierw indukcyjnie pokazać że dla $x \in L$, $y \in T(N)$ mamy $D(x \otimes y) = [x, D(y)]$. Potem zauważyć że dla $x, y \in L$ mamy $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$ i jeszcze raz użyć indukcję.

Definicja: Niech V bedzie przestrzenią wektorową, zaś $L \subset T(V)$ wolną algebrą Liego nad V. Szeregiem Liego nazywamy formalną sumę $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gdzie $a_k \in L$ jest tensorem jednorodnym rzędu k. Podobnie, jeśli $a_k \in T(V)$ są jednorodne rzędu k to formalną sumę powyżej nazywamy formalym szeregiem potęgowym. Zbiór szeregów formalnych oznaczymy przez $\tilde{T}(V)$. $\tilde{T}(V)$ jest uzupełnieniem $T(V)$ w metryce $d(x, y) = 2^{-n}$ gdzie n jest minimalnym rzędem składowej jednorodnej $x - y$ (jeśli $x = y$ to $d(x, y) = 0$).

8. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{Q}$. Sprawdzić że jeśli x jest elementem $\tilde{T}(V)$ ze składową jednorodną rzędu 0 równą 0 to $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/(k!)$ jest dobrze zdefiniowane. Podobnie $\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k/k$ jest dobrze zdefinowane. Ponadto $\exp(\log(1 + x)) = 1 + x$ i $\log(\exp(y)) = y$ zaś jeśli x i y komutują to $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

Wskazówka: Aby pokazać że $\log(\exp(y)) = y$ zdefiniować różniczkowanie i obliczyć pochodną $\log(\exp(ty))$.

9. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{Q}$ z bazą $\{x, y\}$. Pokazać że $M(x, y) = \log(\exp(x)\exp(y))$ jest szeregiem Liego. Ponadto

$$M(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\alpha_i + \beta_i \geq 1} \frac{[x^{\alpha_1}, y^{\beta_1}, \dots, x^{\alpha_k}, y^{\beta_k}]}{(\alpha_1 + \beta_1 + \cdots + \beta_k)\alpha_1!\beta_1! \dots \beta_k!}$$

gdzie

$$[x^{\alpha_1}, y^{\beta_1}, \dots, x^{\alpha_k}, y^{\beta_k}] = \mathrm{ad}_x^{\alpha_1} \mathrm{ad}_y^{\beta_1} \dots \mathrm{ad}_x^{\alpha_k} y$$

dla $\beta_k = 1$. Jeśli $\beta_k > 1$ to powyższe wyrażenie jest równe 0, zaś dla $\beta_k = 0$ mamy podobny wzór z ostatnim członem równym x. Powyższy wzór nazywamy wzorem Campbella-Bakera-Hausdorffa.

Wskazówka: Aby pokazać że $M(x, y)$ jest szeregiem Liego pokazać że

$$\tilde{\Lambda}(\exp(M(x, y))) = \exp(M(x, y)) \otimes \exp(M(x, y)),$$

przejść do logarytmów i zastosować kryterium z zadania 6. Wzór otrzymamy teraz rozwijając złożenie względem x i y i stosując zadanie 7.

10. Pokazać że jeśli G jest grupą Liego z gładkim mnożeniem zaś L jest algebrą Liego G to mnożenie w G w pewnym otoczeniu 1 we współrzędnych exponencjalnych jest zadane wzorem Campbella-Bakera-Hausdorffa.

Wskazówka: Pokazać że wzór zadaje lokanie zdefiniowane działanie które jest łączne o ile odpowienie produkty są dobrze zdefiniowane (jest to tak zwana lokalna grupa Liego). Potem użyć twierdzenie Frobeniusa, podobnie jak w dowodzie o istnieniu podgrupy i jedyności grupy związanej z algebrą.

Uwaga1: To pokazuje że na gładkiej grupie Liego można wprowadzić strukturę analityczną.

Uwaga2: Jeśli L jest przestenią Banacha zaś komutator jest ciągły to wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa zadaje szereg zbieżny w pewnym otoczeniu 0 w L. Jednakże, istnieją nieskończenie wymiarowe L takie że nie odpowiada im grupa Banacha-Liego (rozmaitość Banacha z analitycznym mnożeniem), a więc sama zbieżność szeregu nie wystarcza do pokazania istnienia grupy.

11. Pokazać że dla algebry nilpotentej szereg Campbella-Bakera-Hausdorffa jest wielomianem i wywnioskować stąd istnienie grupy. Dla algebr długości 2 i 3 podać jawny wzór (tzn. pomijający wyrazy szeregu równe zeru dla takich algebr).

Formę dwuliniową ϕ na algebrze Liego nazywamy formą niezmienniczą jeśli $\phi([x,y],z) + \phi(y,[x,z]) = 0$.

12. Jeśli L jest algebrą Liego and ciałemi K, V jest modułem Liego nad L który jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad K to forma $K_V(x,y) = \mathrm{Tr}(\rho(x)\rho(y))$ gdzie $\rho(x) : V \mapsto V$ jest działaniem x, jest symetryczną formą niezmienniczą na L.

13. Pokazać że jeśli L jest skończenie wymiarową prostą algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0, to dowolna symetryczna forma niezmiennicza na L jest wielokrotnością formy Killinga. A więc dla nietrywialnego modułu Liego nad L forma z zadania 12 jest niezdegenerowana.

14. Pokazać że jeśli L jest skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0, $e_1, \ldots, e_n$ jest bazą L, $f_1, \ldots, f_n$ jest bazą dualną względem formy Killinga (tzn. $K(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$) to element $\sum_{i=1}^n e_i f_i \in E(L)$ leży w centum $E(L)$. Element ten nazywamy (uniwersalnym) operatorem Casimira.

Wskazówka: Jeśli $[x, e_i] = \sum_j^n a_{i,j} e_j$, $[x, f_j] = \sum b_{i,j} f_i$ to niezmienniczość implikuje że $a_{i,j} + b_{i,j} = 0$.