Niech A będzie skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętymi F charakterystki 0 i niech C będzie podalgebrą Cartana w C. Mamy wtedy rozkład

$$A = C \oplus \oplus_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$$

gdzie $\Lambda = \{\alpha : \alpha \neq 0, A_\alpha \neq \{0\}\}$.

Lemat 0.1 *Jeśli $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$, $h = [e, f]$, $\beta \neq 0$, $A_\beta \neq \{0\}$ to istnieje liczba wymierna $r_{\alpha,\beta}$ zależna od α, β lecz niezależna od wyboru e, f, taka że $\beta(h) = r_{\alpha,\beta}\alpha(h)$.*

Dowód: Niech $V = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} A_{\beta+n\alpha}$. V jest $\mathrm{ad}_e, \mathrm{ad}_f$ i ad_h niezmiennicza. Skoro $h = [e, f]$ to $\mathrm{Tr}_V(\mathrm{ad}_h) = 0$. Czyli

$$\sum_{n \in Z} (\beta(h) + n\alpha(h)) \dim(A_{\beta+n\alpha}) = 0$$

czyli

$$\beta(h) \sum_{n \in Z} \dim(A_{\beta+n\alpha}) = -\alpha(h) \sum_{n \in Z} n \dim(A_{\beta+n\alpha})$$

i

$$\beta(h) = -\frac{\sum_{n \in Z} n \dim(A_{\beta+n\alpha})}{\sum_{n \in Z} \dim(A_{\beta+n\alpha})} \alpha(h)$$

$\diamond$

Lemat 0.2 *Jeśli A jest algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0, taką że $A = [A, A]$ to forma Killinga A jest niezerowa.*

Dowód: Bez zmniejszania ogólności można zakładać że ciało podstawowe jest algebraicznie domknięte. Niech C będzie podalgebrą Cartana w A. Mamy

$$A = \oplus_\alpha A_\alpha$$

gdzie $A_0 = C$. Ponieważ dla $\beta \neq -\alpha$ mamy $[A_\alpha, A_\beta] \subset A_{\alpha+\beta}$ założenie że $[A, A] = A$ implikuje że $C = \mathrm{lin}[A_\alpha, A_{-\alpha}]$. W szczególności istnieje α, $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$ takie że $h = [e, f] \neq 0$. Z lematu 0.1 wynika teraz że

$$K(h, h) = \sum_\beta \beta(h)^2 \dim(A_\beta) = \alpha(h)^2 \sum_\beta r_{\alpha,\beta}^2 \dim(A_\beta).$$

Suma powyżej jest sumą liczb dodatnich, czyli $K(h, h) = 0$ implikuje że $\alpha(h) = 0$ i konsekwentnie dla dowolnego β takiego że $A_\beta \neq 0$ mamy $\beta(h) = 0$. C jest rozpinane przez wektory h jak wyżej, gdyby dla dowolnego takiego h zachodziło $K(h, h) = 0$ to jedynym α takim że $A_\alpha \neq \{0\}$ byłoby 0, czyli $A = C$ byłaby nilpotentna. Lecz to przeczyłoby warunkowi $[A, A] = A$. $\diamond$

Twierdzenie 0.3 *(Kryterium Cartana). Jeśli A jest skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0 to*

- *A jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy gdy A jest ortogonalne do $[A, A]$ względem formy Killinga*

- *A jest półprosta wtedy i tylko wtedy gdy forma Killinga A jest niezdegenerowana*

Dowód: Jeśli A jest rozwiązalna, to na mocy twierdzenia Liego dla $x \in A$, $y \in [A,A]$ operator $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y$ jest nilpotentny, czyli $K(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) = 0$. Jeśli A jest ortogonalne do $[A,A]$ względem formy Killinga, ale A nie jest rozwiązalna to definiując $A_0 = A$, $A_{k+1} = [A_k, A_k]$ dla pewnego $k \geq 1$ mielibyśmy $A_k = A_{k+1} = [A_k, A_k]$. A_k są ideałami A, a więc forma Killinga A_k jest obcięciem formy Killinga A do A_k. Czyli forma Killinga A_k byłaby zerowa. Ale na mocy lematu 0.2 jest to niemożliwe, co kończy dowód pierwszej części twierdzenia.

Jeśli $I \subset A$ jest nietrywialnym ideałem rozwiązalnym to rozważając $I_0 = I$, $I_{k+1} = [I_k, I_k]$ widzimy że A zawierałaby nietrywialny ideał abelowy (takim ideałem jest I_k z maksymalnym k takim że $I_k \neq \{0\}$. Jeśli I jest ideałem abelowym, $x \in A$, $y \in I$ to I jest podprzestrzenią niezmienniczą dla ad_x i dla ad_y czyli I jest nieziennicze dla $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y$. Na I mamy $\mathrm{ad}_y = 0$ czyli $\mathrm{Tr}_I(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) = 0$. Skoro $\mathrm{ad}_y(A) \subset I$ to na przestrzni ilorazowej A/I operator ad_y indukuje operator zerowy i

$$K(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) = \mathrm{Tr}_I(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) + \mathrm{Tr}_{A/I}(\bar{\mathrm{ad}}_x\bar{\mathrm{ad}}_y) = 0$$

gdzie $\bar{\mathrm{ad}}_x$ i $\bar{\mathrm{ad}}_y = 0$ są operatorami na A/I indukownymi przez ad_x i ad_y. A więc gdyby A nie była półprosta to forma Killinga K byłaby zdegenerowana.

Pozostaje pokazać że algebra półprosta ma niezdegenerowaną formę Killinga. Nie wprost, gdyby A była półprosta, zaś K byłaby zdegenerona to $I = \{x \in A : \forall_{y\in A} K(x,y) = 0\}$ byłby ideałem A z zerową formą Killinga. Na mocy pierwszej części I były ideałem rozwiązalnym, co przeczyłoby półprostocie. Czyli $I = \{0\}$ i K jest niezdegenerowana. $\diamond$

Twierdzenie 0.4 *Niech A będzie skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0 i niech $\mathrm{Der}(A)$ będzie algebrą Liego różniczkowań A. Wtedy odwzorowanie $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ zadaje izomorfizm A z $\mathrm{Der}(A)$*

Dowód: Jądrem odwzorowania $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ jest centrum A, skoro A jest półprosta to centum jest trywialne i A jest izomorficzne ze swoim obrazem $\tilde{A}$ w $\mathrm{Der}(A)$. $\tilde{A}$ jest ideałem w $\mathrm{Der}(A)$:

$$[d, \mathrm{ad}_x](z) = d([x,z]) - [x, d(z)] = [d(x), z] + [x, d(z)] - [x, d(z)] = [d(x), z] = \mathrm{ad}_{d(x)}(z).$$

A więc forma Killing $\mathrm{Der}(A)$ na $\tilde{A}$ jest identyczna z formą Killinga $\tilde{A}$ czyli jest niezdegenorowana. Niech $I = \{d \in \mathrm{Der}(A) : \forall_{x\in\tilde{A}} K(d,x) = 0\}$. Mamy wtedy $\mathrm{Der}(A) = \tilde{A} \oplus I$. Mianowicie, dla $d \in \mathrm{Der}(A)$ i $x \in \tilde{A}$ definujemy $\beta_d(x) = K(d,x)$. Skoro K jest niezdegenerowana na $\tilde{A}$ to istnieje $y \in \tilde{A}$ taki że $\beta_d(x) = K(y,x)$. Teraz dla dowolnego $x \in \tilde{A}$ mamy $K(d-y,x) = 0$, czyli $d - y \in I$, co pokazuje że $d \in \tilde{A} + I$. Jako że d jest dowolne to $\mathrm{Der}(A) = \tilde{A} + I$. Jeśli $x \in I \cap \tilde{A}$ to x leży jądrze K obciętego do $\tilde{A}$, co dzieki temu że K jest niezdegenerowana na $\tilde{A}$ oznacza że $x = 0$, czyli suma $\tilde{A} + I$ jest sumą prostą.

Forma Killinga jest niezmiennicza, a więc I jest ideałem: dla $d \in I$, $x \in \tilde{A}$, $z \in \mathrm{Der}(A)$ mamy $[z,x] \in \tilde{A}$ i

$$K([z,d],x) = -K(d,[z,x]) = 0$$

czyli $[z,d] \in I$. Teraz dla $d \in I$ i $x \in \tilde{A}$ mamy $[d,x] \in \tilde{A} \cap I = \{0\}$. Lecz, jak to obliczyliśmy wyżej $[d, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{d(x)}$, czyli $d = 0$, co oznacza że $I = \{0\}$ i $\mathrm{Der}(A) = \tilde{A}$. $\diamond$

Definicja: Mówimy że operator S na przestrzeni wektorowej V jest półprosty jeśli V ma bazę złożoną z wektorów własnych S.

Lemat 0.5 *Jeśli V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem algebraicznie domkniętym zaś A jest operatorem liniowym na V, to istnieją operatory S i N takie że $A = S + N$, S jest półprosty, N jest nilpotentny i S komutuje z każdym operatorem komutującym z A.*

Dowód: Jeśli A ma tylko jedną wartość własną a to $S = aI$ i $N = A - S$ daje żądany rozkład. Mianowicie, skoro A ma tylko jedną wartość własną to wielomian minimaly A to $(X-a)^k$ dla pewnego k, czyli $N^k = (A-aI)^k = 0$ i N jest nilpotentny. Oczywiście S jest półprosty i komutuje z każdym operatorm a więc tym bardziej z każdym operatorem komutującym z A.

Jeśli A ma wartości własne $a_1, \ldots, a_n$ to niech $V_i = \{v \in V : (A-a_iI)^{\dim(V)}v = 0\}$. Jeśli B komutuje z A to dla $v \in V_i$ mamy $(A - a_iI)^{\dim(V)}Bv = B(A - a_iI)^{\dim(V)}v = 0$, czyli $Bv \in V_i$. Innymi słowy, podprzestrzenie V_i są niezmiennicze dla B. Lecz $V = \oplus V_i$ czyli jeśli zbudujemy rozkład na każdym z V_i z osobna to będzie miał żądane własności: skoro V_i są niezmiennicze dla B to S komitując z B na każdym z V_i z osobna będzie komitował z B. Oczywiście S będąc sumą prostą operatorów półprostych jest półprosty, N będąc sumą prostą operatorów nilpotentnych jest nilpotentny. $\diamond$

Lemat 0.6 *Niech A będzie skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 i niech C będzie podalgebrą Cartana w A. Niech $A = \oplus_\alpha A_\alpha$ gdzie $A_0 = C$. Dla $\alpha \neq -\beta$ przestrzenie A_α i A_β są ortogonalne względem formy Killinga. Forma Killinga A obcięta do C jest niezdegenerowana. Ponadto forma Killinga zadaje dualność między A_α a $A_{-\alpha}$.*

Dowód: Wiemy że $[A_\alpha, A_\gamma] \subset A_{\alpha+\gamma}$, a więc dla $x \in A_\alpha$, $y \in A_\beta$ mamy $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y(A_\gamma) \subset A_{\alpha+\beta+\gamma}$ i $(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y)^k(A_\gamma) \subset A_{k(\alpha+\beta)+\gamma}$. Jeśli $\alpha \neq -\beta$ dla dowolnego γ takiego że $A_\gamma \neq \{0\}$ i dużych k mamy $A_{k(\alpha+\beta)+\gamma} = \{0\}$, czyli $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y$ jest nilpotentny, czyli $K(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) = 0$. Skoro forma Killinga jest niezdegenrowana zaś dla $\alpha \neq -\beta$ A_α jest ortogonalne do A_β to $A_{-\alpha}$ musi być dualne do A_α. W szczególności dla $\alpha = 0$ oznacza to że forma Killinga obcięta do C jest niezdegenerowana. $\diamond$

Lemat 0.7 *Przy założenich poprzedniego lematu C jest przemienna i dla $x \in C$ operator ad_x jest półprosty.*

Dowód: Dla $x, y \in C$ mamy

$$K(x,y) = \sum \alpha(x)\alpha(y)\dim(A_\alpha)$$

Jeśli $y \in [C,C]$ to wtedy $\alpha(y) = 0$ dla dowolnego α takiego że $A_\alpha \neq \{0\}$. A więc wtedy $K(x,y) = 0$, czyli $y = 0$ bo forma Killinga obcięta do C jest niezdegenerowana. Konsekwentnie $[C,C] = \{0\}$ is C jest przemienna.

Dla $x \in C$ niech $\mathrm{ad}_x = S + N$ będzie rozkładem ad_x na część półprostą i nilpotentną. S jest różniczkowaniem A: dla $y \in A_\alpha$, $z \in A_\beta$ mamy $[y,z] \in A_{\alpha+\beta}$, $S(y) = \alpha(x)y$, $S(z) = \beta(x)z$ a więc

$$S([y,z]) = (\alpha+\beta)(x)[y,z] = [\alpha(x)y, z] + [y, \beta(x)z] = [S(y), z] + [y, S(z)].$$

Na mocy 0.4 istnieją $s, n \in A$ takie że $\mathrm{ad}_s = S$ i $\mathrm{ad}_n = N$. S komutuje z każdymo operatorm komutującym z ad_x, a więc w szczególności S komutuje z ad_y dla dowolnego $y \in C$. A więc jeszcze raz używając 0.4 widzimy że s komutuje z C, czyli s należy do normalizatora C, czyli $s \in C$. Skoro $x = s + n$ to również $n \in C$. Jednakże ad_n jest nilpotentny, czyli $\alpha(n) = 0$ dla α takich że $A_\alpha \neq \{0\}$, czyli jak poprzednio $n = 0$, co oznacza że $\mathrm{ad}_x = S$ jest półprosty.

Niech $\Lambda = \{\alpha \neq 0 : A_\alpha \neq \{0\}\}$. Przy założeniach jak wyżej forma Killinga jest niezdegenerowana na C, a więc dla $\alpha \in \Lambda$ istnieje dokładnie jeden $h_\alpha \in C$ takie że $\alpha(x) = K(h_\alpha, x)$ dla dowolnego $x \in C$.

Lemat 0.8

- *Jeśli* $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$ *to* $[e,f] = K(e,f)h_\alpha$.
- $\alpha(h_\alpha) \neq 0$
- $\{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ *rozpina* C
- *Jeśli* $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$, $K(e,f) \neq 0$ *to podalgebra* A *generowana przez* e, f *i* h_α *jest izomorficzna z* $\mathrm{sl}(2,F)$
- *Przestrzenie* A_α *są jednowymiarowe*
- *Jeśli* $\alpha, t\alpha \in \Lambda$ *to* $t \in -1, 1$
- *Jeśli* $\alpha, \beta \in \Lambda$ *to* $2K(h_\alpha, h_\beta)/K(h_\alpha, h_\alpha)$ *jest liczbą całkowitą*

Dowód: Niech $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$. Dla $x \in C$ mamy

$$K([e,f], x) = -K(f, [e,x]) = \alpha(x)K(f,e) = K(f,e)K(h_\alpha, x)$$

czyli $K([e,f] - K(e,f)h_\alpha, x) = 0$ co na mocy niezdegenerowania K na C oznacza że $[e,f] = K(e,f)h_\alpha$. A więc pokazaliśmy pierwszy punkt.

Na mocy lematu 0.1 dla dowolnego $\beta \in \Lambda$ mamy $\beta(h_\alpha) = c_{\alpha,\beta}\alpha(h_\alpha)$, czyli $\alpha(h_\alpha)$ implikowałoby $\beta(h_\alpha) = 0$, czyli (jak w dowodzie 0.7) h_α byłoby ortogonelne do C względem formy Killinga i $h_\alpha = 0$. Lecz $\alpha \neq 0$, więc $h_\alpha \neq 0$ co oznacza że $\alpha(h_\alpha) \neq 0$

A jest półprosta, więc $A = [A, A] = \mathrm{lin}[A_\alpha, A_\beta]$ Dla $\alpha \neq -\beta$ dostajemy składniki rozkładu różne od C, a więc $C = \mathrm{lin}_{\alpha \neq 0}[A_\alpha, A_{-\alpha}]$. Na mocy poprzedniego punktu $[A_\alpha, A_{-\alpha}]$ jest rozpinane przez h_α, czyli $C = \mathrm{lin}\{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

Aby pokazać trzeci punkt niech $g = 2f/(\alpha(h_\alpha)K(e,f))$. Wtedy $K(e,g) = K(e,f)/(\alpha(h_\alpha)K(e,f)) = 2/\alpha(h_\alpha)$, $h = [e,g] = K(e,g)h_\alpha = 2h_\alpha/\alpha(h_\alpha)$ i $\alpha(h) = 2\alpha(h_\alpha)/\alpha(h_\alpha) = 2$. A więc $[h,e] = \alpha(h)e = 2e$ i $[h,g] = -\alpha(h)g = -2g$ co oznacza że h, e, g spełniają te same relacje komutacji co

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli $h \mapsto h$, $e \mapsto X$, $g \mapsto Y$ zadaje izomorfizm.

Przypuśćmy teraz że A_α ma wymiar większy niż 1. Wtedy istniałby $z \in A_\alpha$ taki że $z \neq 0$, lecz $K(z,g) = 0$. A więc $[g,z] = K(z,g)h_\alpha = 0$, czyli z generowały skończenie wymiarowy moduł M nad $\mathrm{sl}(2,F)$ taki że wszystkie wartości własne h byłyby dodanie. Dokładniej niech $z_0 = 0$ i $z_{k+1} = [e, z_k]$. Zauważmy że istnieją stałe c_k takie że $[g, z_k] = c_k z_{k-1}$ dla $k \geq 0$ (gdzie $c_0 = 0$ i $z_{-1} = 0$). Mianowicie indukcyjnie $[g, z_{k+1}] = [g,[e,z_k]] = [[g,e],z_k] + [e,[g,z_k]] = -[h,z_k] + [e, c_k z_{k-1}] = -2kz_k + c_k z_k$ czyli $M = \mathrm{lin}\{\mathrm{ad}_e^k(z) : k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$ bo ta podprzestrzeń jest niezmiennicza na działanie h, e, g. Ale taki moduł M nie istnieje co oznacza że przestrzeń A_α jest jednowymiarowa.

Podobnie, jeśli $A_{t\alpha}$ jest nietrywialne to h musi mieć całkowitą wartość własną na $A_{t\alpha}$, czyli $2t \in \mathbb{Z}$. Ale rola α i $t\alpha$ jest symetryczna, czyli również $2/t \in \mathbb{Z}$. Gdyby $t = 2$ to $A_{2\alpha} = \mathrm{ad}_e(A_\alpha)$ lecz jest to niemożliwe bo A_α jest rozpinane przez e i $\mathrm{ad}_e(A_\alpha) = \{0\}$. Przez symetrię wykluczone jest również $t = -2$, $t = 1/2$, i $t = -1/2$. A więc jedne możliwości które pozostają to $t = -1$ lub $t = 1$.

Aby pokazać ostatni punkt rozważmy podalgebrę A generowaną przez h_α, e, f. Jak wiemy ta algebra jest izomorficzna z $\mathrm{sl}(2,F)$. Niech $H = 2h_\alpha/K(h_\alpha,h_\alpha)$. Z opisu skończenie wymiarowych modułów nad $\mathrm{sl}(2,F)$ wiemy że w dowolnym takim module H ma całkowite wartości własne. Rozważmy działanie H na $x \in A_\beta$: $[H,x] = 2\beta(h_\alpha)/K(h_\alpha,h_\alpha) = 2K(h_\beta,h_\alpha)/K(h_\alpha,h_\alpha)$, czyli $2K(h_\beta,h_\alpha)/K(h_\alpha,h_\alpha)$ jako wartość własna H jest liczbą całkowitą. $\diamond$

Lemat 0.9 *$\alpha(h_\alpha) \in \mathbb{Q}$ i $\alpha(h_\alpha) > 0$. Niech $V = \mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}\{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Forma Killinga obcieta do V przyjmuje wartości wymierne i jest dodatnio określona. Ponadto, jeśli $S \subset \Lambda$ i $\Delta = \{h_\alpha : \alpha \in S\}$ jest bazą C and F, to Δ jest bazą V.*

Dowód: $\alpha(h_\alpha) = K(h_\alpha,h_\alpha) = \sum_{\beta\in\Lambda}\beta(h_\alpha)^2 = \sum_{\beta\in\Lambda}(r_{\alpha,\beta}\alpha(h_\alpha))^2$ czyli

$$\alpha(h_\alpha) = \frac{1}{\sum_{\beta\in\Lambda} r_{\alpha,\beta}^2},$$

więc $\alpha(h_\alpha) \in \mathbb{Q}$ i $\alpha(h_\alpha) > 0$.

Jeśli $h = \sum q_\alpha h_\alpha$, to $\beta(h) = \sum_{\alpha,\beta\in\Lambda} q_\alpha r_{\alpha,\beta}\alpha(h_\alpha)$ czyli $\beta(h) \in \mathbb{Q}$. Jeśli $h_1, h_2 \in V$ to $K(h_1,h_2) = \sum_{\beta\in\Lambda}\beta(h_1)\beta(h_2) \in \mathbb{Q}$ i $K(h,h) = \sum_{\beta\in\Lambda}\beta(h)^2 \geq 0$. Jeśli $K(h,h) = 0$ to dla każdego $\beta \in \Lambda$ mamy $\beta(h) = 0$ i h jest ortogonalne względem formy Killinga do C, czyli $h = 0$.

Niech Δ jak wyżej będzie bazą C nad F, $\tilde{V} = \mathrm{lin}_{\mathbb{Q}}(\Delta)$ i niech $\beta \in \Lambda$. Dla $h_\alpha \in \Delta$ mamy $\beta(h_\alpha) = K(h_\beta,h_\alpha) \in \mathbb{Q}$ czyli $\beta in \tilde{V}^*$, czyli istnieje $\tilde{h} \in \tilde{V}$ taki że $\beta(h) = K(\tilde{h},h)$ dla $h \in \tilde{V}$. Jednakże $\Delta \subset \tilde{V}$ jest bazą C nad F, więc $\beta(h) = K(\tilde{h},h)$ dla $h \in C$, czyli $\tilde{h} = h_\beta$, a więc $h_\beta \in \tilde{V}$ $\diamond$

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią nad ciałem $F \subset \mathbb{R}$. Zakładamy że na V jest zadany iloczyn skalarny. Dla wektora $v \in V$ odbicie σ_v w kierunku v definiujemy wzorem

$$\sigma_v(x) = x - 2\frac{v(v,x)}{(v,v)}$$

Lemat 0.10 *Istnieje automorfizm $\phi : A \mapsto A$ taki że $\phi(C) = C$, $\phi(h_\alpha) = -h_\alpha$ i $\phi(h) = h$ dla $h \in C$ takich że $\alpha(h) = 0$. Innymi słowy, $\phi|_C$ jest odbiciem w kierunku h_α.*

Dowód: Wybieramy $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$, tak by $\alpha([e,f]) = 2$. Wtedy podalgebra A generowana nad $\mathbb{Q}$ przez $[e,f], e, f$ jest izomorficzna z $\mathrm{sl}(2,\mathbb{Q})$. Niech

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przy izomorfiźmie $[e,f]$ przechodzi na H, e przechodzi na X, f przechodzi na Y. Zauważmy że ad_e i ad_f są nilpotentnymi automorfizmami A, dlatego $\psi_1 = \exp(\mathrm{ad}_e) = \sum \mathrm{ad}_e^k/k!$ i $\psi_2 = \exp(-\mathrm{ad}_f) = \sum(-\mathrm{ad}_f)^k/k!$ są dobrze zdefinowanymi automorfizmami A. Pokażemy że $\phi = \psi_1\psi_2\psi_1$ jest pożądanym automorfizmem. Mianowicie, jeśli $h \in C$ i $\alpha(h) = 0$ to $[h,e] = [h,f] = 0$, czyli $\mathrm{ad}_e(h) = \mathrm{ad}_f(h) = 0$ i konsekwentnie $\psi_1(h) = \psi_2(h) = 0$, wiec $\phi(h) = h$. Pozostaje pokazać że $\phi([e,f]) = -[e,f]$. Dzięki izomorfizmowi algebry generowanej przez $[e,f], e, f$ z $\mathrm{sl}(2,\mathbb{Q})$ jest to cwiczenie na mnożenie macierzy 2 na 2. Dokładniej, wystarczy wykonać obliczenia używając ad_X i ad_Y zamiast ad_e i ad_f. Dla $Z \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{Q})$ mamy $\mathrm{ad}_X(Z) = XZ - ZX = L_X(Z) - R_X(Z)$ gdzie L_X jest operatorem mnożenia z lewej strony, zaś R_X operatorem mnożenia z prawej strony. Ponieważ mnożenie z lewej komutuje z mnożeniem z prawej many $\exp(\mathrm{ad}_X) = L_{\exp(X)}R_{\exp(-X)}$ i konsekwentnie $\phi([e,f])$ przechodzi przy izomorfiźmie na $L_{\exp(X)\exp(-Y)\exp(X)}R_{\exp(-X)\exp(Y)\exp(-X)}H$. Teraz

$$\exp(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(-Y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(X)\exp(-Y)\exp(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\exp(X)\exp(-Y)\exp(X)}R_{\exp(-X)\exp(Y)\exp(-X)}H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -H.$$

$\diamond$

Definicja: Niech V będzie jak w definicji odbicia. Mówimy że skończony podzbiór $\Lambda \subset V$ jest *systemem pierwiastków* jeśli $0 \notin \Lambda$, Λ rozpina V i dla każdego $v \in \Lambda$ mamy $\sigma_v(\Lambda) \subset \Lambda$. Mówimy że Λ jest *krystalograficzny* jeśli $2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta) \in \mathbb{Z}$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in \Lambda$. Mówimy że Λ jest zredukowany jeśli dla $\alpha, t\alpha \in \Lambda$ implikuje że $t \in -1, 1$.

Twierdzenie 0.11 *Niech A, V, Λ będą jak wyżej (na V rozpatrujemy iloczyn skalarny wyznaczony przez formę Killinga). Λ jest zredukowanym krystalograficznym układem pierwiastków na V. A jest wyznaczona przez Λ z dokładnością do izomorfizmu. Dla dowolnego zredukowanego krystalograficznego układu pierwiastków Λ istnieje półprosta algebra Liego $A_{\Lambda,F}$ nad F z Λ jako układem pierwiastków. Ponadto istnieje półprosta algebra Liego A_Λ nad $\mathbb{Q}$ taka że jej podalgebra Cartana diagonalizuje się i Λ jest jej układem pierwiastków (innymi słowy, w odpowiedniej bazie można A zdefiniować nad liczbami wymiernymi).*

Szkic dowodu: Na mocy 0.10 Λ jest układem pierwiastków. Na mocy 0.8 Λ jest zredukowanym układem krystalograficznym. A priori Λ zależy od wyboru podalgebry Cartana. Jednakże wszystkie podalgebry Cartana A są sprzężone, tzn. dla downych podalgebr Cartana $C_1, C_2 \subset A$ istnieje automorfizm A przeprowadzający C_1 na C_2 (to twierdzenie pryjmujemy bez dowodu). Oznacza to że układ pierwiastków jest wyznaczony przez A z dokładnością do izomorfizmu. Istnienie algebry z zadanym układem pierwiastków dowodzimy dla każdego nierozkładalnego układu pierwiastków z osobna (dla serii A_n, B_n, C_n i D_n sprawdzamy że klasyczne algebry mają taki układ pierwiastków, potem trzeba przeanalizować pozostałe pięć układów pierwiastków). Pomijam dowód pozostałej części twierdzenia. $\diamond$

Teraz chcemy wyznaczyć strukturę nierozkładalnych układów pierwiastków.

Lemat 0.12 *Niech Λ będzie układem pierwiastów w przestrzni dwuwymiarowej nad $\mathbb{R}$ zaś $e_\alpha = \alpha/|\alpha|$ dla $\alpha \in \Lambda$. Wtedy e_α są wierzchołkami $2n$-kąta foremnego dla pewnego $n \in Z$.*

Dowód: e_α są wektorami jednostkowej długości, każdy z nich wyznacza punkt na okręgu jednostkowym. Ponumerujmy α tak by te punkty wypadały po kolei, tzn. $e_{\alpha_{j-1}}$ i $e_{\alpha_{j+1}}$ są najbliższymi punktami do e_{α_j} (i leżą po róznych stronach). Skoro układ pierwiastków jest nizmienniczy na odbicia w kierunku swoich elementów, to $\sigma_{e_{\alpha_j}}(e_{\alpha_{j-1}}) = -e_{\alpha_{j+1}}$, czyli kąt między $e_{\alpha_{j-1}}$ a e_{α_j} jest taki sam jak kąt między e_{α_j} a $e_{\alpha_{j+1}}$, co oznacza że e_α są wierzchołkami wielokąta foremnego. Ponieważ $\alpha \in \Lambda$ implikuje $-\alpha \in \Lambda$, moc $\{e_\alpha\}$ jest parzysta. $\diamond$

Niech $\omega \in V$ będzie wektorem takim że $(\alpha, \omega) \neq 0$ dla $\alpha \in \Lambda$, $\Lambda_+ = \{\alpha \in \Lambda : (\alpha, \omega) > 0\}$. Λ_+ nazywamy zbiorem pierwiastków dodatnich.

Lemat 0.13 *Niech $\Delta \subset \Lambda_+$ będzie zbiorem tych elementów Λ_+ które dają wszystkie kierunki ekstremalne stożka wypukłego generowanego przez Λ_+. Wtedy dla $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$ mamy $(\alpha, \beta) \leq 0$. Co więcej kąt pomiędzy α a β to $(n-1)\pi/n$ dla pewngo $n \in \mathbb{Z}$. Ponadto Δ jest bazą V.*

Dowód: Wiadomo dowolny element właściwego domkniętego stożka wypukłago jest kombinacją liniową o współczynnikach dodatnich elementów zadających kierunki ekstremalne. Czyli każdy element Λ_+ jest kombinacją linową elementów z Δ. Ponieważ $\Lambda = \Lambda_+ \cup -\Lambda_+$ to również każdy element z Λ jest kombinacją linową elementów z Δ. Lecz Λ rozpina V czyli Δ rozpina V. Jeśli V jest jednowymiarowe to Δ składa się z jednego elementu i teza jest oczywista. W przeciwnym razie dla $\alpha, \beta \in \Delta$ $\alpha \neq \beta$ rozpatrzmy podprzestrzeń $V_{\alpha,\beta} = \mathrm{lin}\{\alpha, \beta\} \subset V$. Niech $\Omega = \Lambda \cap V_{\alpha,\beta}$ zaś $\Omega_+ = \Lambda_+ \cap V_{\alpha,\beta}$. Ω jest systemem pierwiastków w przestrzeni dwuwymiarowej zaś Ω_+ odpowiednim układem pierwiastków dodatnich. Z lematu wiemy że po unormowaniu elementy Ω są wierzchołkami $2n$-kąta foremnego. $n \geq 2$, przy tym dla $n = 0$ mamy czworokąt i widać że α i β są ortogonalne. Dla $n > 2$ mamy $|\Omega_+| = n$, czyli pomiędzy α a β musi być $n-1$ innych pierwiasków, czyli kąt pomiędzy α a β to $(n-1)\pi/n$. Dla $n > 2$ to implikuje że $(\alpha, \beta) < 0$.

Aby pokazać że Δ jest liniowo niezależne rozważmy kombinację liniową $\sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha \alpha$. Niech $D_+ = \{\alpha \in \Delta : a_\alpha > 0\}$, $D_- = \{\alpha \in \Delta : a_\alpha < 0\}$ i niech $w = \sum_{\alpha \in D_+} a_\alpha \alpha$, $v = \sum_{\alpha \in D_-} a_\alpha \alpha$. Ponieważ dla $\alpha in \Lambda_+$ mamy $(\omega, \alpha) > 0$ to $(\omega, w) = \sum_{\alpha \in D_+} a_\alpha (\omega, \alpha) > 0$ czyli $w \neq 0$ o ile $D_+ \neq \emptyset$. Podobnie $v \neq 0$ o ile $D_- \neq \emptyset$. Jeśli nie wszystkie współczynniki rozważanej kombinacji liniowej znikają to co najmniej jeden z D_+ lub D_- jest niepusty. Jeśli dokładnie jeden jest niepusty to poprzednie uwagi pokazują że ta kombinacja jest niezrowa.

Jeśli oba są niepuste to $(w+v,w+v)=(w,w)+2(w,v)+(v,v)$. Następnie $(w,v)=\sum_{\alpha\in D_+,\beta\in D_-} a_\alpha a_\beta(\alpha,\beta)\geq 0$ bo $a_\alpha>0$, $a_\beta<0$, $(\alpha,\beta)\leq 0$, czyli $(w+v,w+v)\geq(w,w)+(v,v)>0$, czyli $w+v\neq 0$ co pokazuje liniową niezależność. $\diamond$

Diagramem Coxetera-Dynkina (lub krótko diagramem Dynkina) związanym z Λ nazywany graf którego wierchołkami są elementy Δ zaś krawędzię są pomiędzy takimi $\alpha,\beta\in\Delta$ że $(\alpha,\beta)<0$. Przy tym krawędzi przypisujemy wagę n jeśli kąt pomiędzy α a β to $(n-1)\pi/n$.

Ogólniej, możemy rozpatrywać układy wektorów Δ takie że dla $\alpha,\beta\in\Delta$, $\alpha\neq\beta$ kąt pomiędzy α a β to $(n-1)\pi/n$ dla pewnego $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 2$.

Lemat 0.14 *Diagram Dynkina nie zawiera cykli.*

Dowód. Jeśli α_i dla $i=1,\ldots,k$ stanowią cykl, to biorąc $e_i=\alpha_i/|\alpha_i|$ i $v=\sum_{i=1}^k e_i$ mam $(v,v)=\sum_{i=1}^k(e_i,e_i)+2\sum_{i\neq j}(e_i,e_j)$. Dla $i\neq j$ połączonych krawędzią kąt między e_i a e_j to co najmniej $2\pi/3$, czyli $(e_i,e_j)\leq -1/2$. W cyklu mamy k par i,j połączonych krawędziami, co oznacza że $(v,v)\leq 0$, co dałoby sprzeczność z liniową niezależnością α_i. $\diamond$

Dla $\alpha\in\Delta$ niech $e_\alpha=\alpha/|\alpha|$. Dla $\alpha,\beta\in\Delta$ niech $q_{\alpha,\beta}=(e_\alpha,e_\beta)$

Lemat 0.15 *Niech $S\in\Delta$, $\alpha\notin S$. Wtedy $\sum_{\beta\in S} q_{\alpha,\beta}^2<1$*

Dowód: Bez zmniejszania ogólności możemy zakładać że $q_{\alpha,\beta}\neq 0$ dla $\beta\in S$. Z poprzedniego lematu (braku cykli) wynika teraz że $q_{\beta_1,\beta_2}=0$ dla $\beta_1,\beta_2\in S$, czyli $\{e_\beta\in S\}$ jest bazą ortonormalną pewnej podprzestrzeni $W\subset V$. $e_\alpha\notin W$, czyli rzut e_α na W ma długość mniejszą niż 1. Lecz kwadrat tej długości wynosi $\sum_{\beta\in S}(e_\alpha,e_\beta)^2=\sum_{\beta\in S} q_{\alpha,\beta}^2$. $\diamond$

Lemat 0.16 *Spójny diagram Dynkina z krawędzią wagi ≥ 6 ma dwa wierzchołki.*

Dowód. Niech α i β będą wierzchołkami połączonymi krawędzią wagi ≥ 6. Gdyby było więcej wierzchołków to istniałaby wierzchołek γ połączony albo z α albo z β. Bez utraty ogólności można zakładać że γ jest połączony z α. Waga 6 oznacza że $q_{\alpha,\beta}^2\geq 3/4$, $q_{\alpha,\gamma}^2\geq 1/4$ co dałoby sprzeczność z poprzednim lematem.

Lemat 0.17 *Wierzchołek diagramu Dynkina jest połączony z co najwyżej trzema innymi wierzchołkami. Jeśli jest połączony z trzema wierzchołkami to wagi krawędzi to 3. Żaden wierzchołek nie należy do dwu krawędzi wagi ≥ 4.*

Dowód. To wynika bezpośrednio z lematy o sumie $q_{\alpha,\beta}^2$: $q_{\alpha,\beta}^2\geq 1/4$, a jeśli waga jest większa niż 3 to $q_{\alpha,\beta}^2\geq 1/2$ $\diamond$

Lemat 0.18 *Diagram Dynkina zawiera co najwyżej jeden punkt rozgałęzienia i co najwyżej jedną krawędź wagi ≥ 4. Jeśli jest punkt rozgałęzienia to wszystkie wagi to 3.*

Lematy powyżej i kilka następnych lematów tego typu w sumie daje dowód podanego na wykładzie twierdzenia o klasyfikacji układów pierwiastków.