1. Sprawdzić że podana na wykładzie realizacja grupy Heisenberga jest izomorficzna z realizacją przy pomocy macierzy. Przypominam że pierwsza realizacja to $\mathbb{R}^3$ z mnożeniem zadanym wzorem $(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1))$. Realizacja macierzami to macierze postaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sprawdzić że wzór $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \exp(x_2)y_1 + y_2)$ zadaje na $\mathbb{R}^2$ strukturę grupy Liego. Pokazać że grupa ta jest izomorficzna z grupą przekształceń afinicznych prostej zachowujących orientację.

3. Niech $Aut(H)$ oznacza grupę automorfizmów grupy H, zaś A jest homomorfizmem z G w $Aut(H)$. Na produkcie grup G i H wprowadzamy mnożenie wzorem:

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, (A(g_2^{-1})h_1)h_2)$$

Otrzymujemy w ten sposób grupę nazywaną produktem półprostym G i H (sprawdzić). Pokazać że jeśli G i H są grupami Liego i A jest odwzorowaniem gładkim (jako odwzorowanie z $G \times H$ w H) to produkt półprosty G i H jest grupą Liego.

4. Przestawić jako produkt półprosty następujące grupy: grupę przekształceń afinicznych na przestrzni euklidesowej, grupę isometrii przestrzni euklidesowej, grupę Heisenberga, grupę macierzy górno-trójkątnych (tzn. takich że wszyskie elementy poniżej diagonali są zerami).

5. Przestrzeń k-dżetów odwzorowań $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^n$ w punkcie 0 to przestrzeń ilorazowa przestrzeni wszystkich funkcji gładkich z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^n$ przez podprzestrzeń funkcji których $k+1$ pochodnych w 0 znika. Z definicji wynika że pochodne do rzędu k w 0 są dobrze zdefiniowane dla k-dżetów (nie zależą od wyboru reprezentantów). Pokazać że przestrzeń k-dżetów odwzorowań $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$ w punkcie 0 takich że wartość w 0 to 0 i pierwsza pochodna jest odwracalna ma naturalną strukturę grupy Liego (działaniem jest składanie (dżetów) odwzorowań).

6 Pokazać że następujące przestrzenie są izomorficzne

- Przestrzeń klas równoważności krzywych gładkich $\gamma : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}^n$ takich że $\gamma(0) = 0$, gdzie za równoważne uznajemy krzywe mające tą samą pochodną w 0, z dodawaniem krzywych po współrzędnych

- Przestrzeń funkcjonałów liniowych na 1-dżetach odwzorowań z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}$ w punkcie 0 takich że wartość w 0 to 0 Przy tym izomorfizm jest naturalny, tzn. taki sam wzór działa jeśli zamiast $\mathbb{R}^n$ mamy dowolną izomorficzną z nią przestrzeń. Ponadto, izomorfizm zależy tylko od zachowania krzywych (jetów) w dowolnie małym otoczeniu 0 i komutuje z dyfeomorfizmami (lokalnymi) zachowującymi 0.

Przypominam że różniczkowanim na pierścieniu funkcji gładkich T nazywamy $\mathbb{R}$-liniowe odwzorowanie $D : T \mapsto T$ spełniające wzór Leibnitza $D(fg) = fD(g) + D(f)g$

7 Sprawdzić że jeśli D_1 i D_2 są różniczkowaniami to ich komutator $D_1 D_2 - D_2 D_1$ też jest różniczkowaniem.

8 Niech U będzie podzbiorem otwartym $\mathbb{R}^n$. Pokazać że każde różniczkowanie $T = C^\infty(U)$ jest postaci $\sum f_i \partial_{x_i}$ gdzie $f_i \in T$

9 Wyznaczyć algebry Liego następujących grup: grupy z zadania2, $GL(n, R)$, $SL(2, \mathbb{R})$ i grupy która jako rozmitość jest równa $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ z mnożeniem zadanym wzorem: $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \exp(ix_2)y_1 + y_2)$ (ta grupa jest izomorficzna z nakryciem jednospójnym grupy izometrii płaszczyzny).