1. Jeśli L jest algebrą Liego nad ciałem K, V jest modułem Liego nad L który jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad K to forma $K_V(x,y) = \mathrm{Tr}(\rho(x)\rho(y))$ gdzie $\rho(x) : V \mapsto V$ jest działaniem x, jest symetryczną formą niezmienniczą na L.

Uwaga: W szczególności wynika stąd niezmienniczość formy Killinga.

2. Pokazać że jeśli L jest skończenie wymiarową prostą algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0, to dowolna symetryczna forma niezmiennicza na L jest wielokrotnością formy Killinga. A więc forma z zadania 1 jest zerowa lub niezdegenerowana.

3. Pokazać że skończenie wymiarowa algebra półprosta nad ciałem charakterystyki 0 jest sumą prostą algebr prostych.

4. Pokazać że skończenie wymiarowa algebra półprosta L nad ciałem liczb rzeczywistych jest algebrą Liego pewnej grupy zwartej G wtedy i tylko wtedy gdy forma Killinga L jest ujemnie określona.

Wskazówka: Dla algebr prostych rozważyć obraz L w unitarnej reprezentacji G.

5. Pokazać że jeśli L jest skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0, $e_1, \ldots, e_n$ jest bazą L, $f_1, \ldots, f_n$ jest bazą dualną względem formy Killinga (tzn. $K(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$) to element $\sum_{i=1}^n e_i f_i \in E(L)$ leży w centum uniwersalnej algebry obwiedniej $E(L)$. Element ten nazywamy (uniwersalnym) operatorem Casimira.

Wskazówka: Jeśli $[x, e_i] = \sum_j^n a_{i,j} e_j$, $[x, f_j] = \sum b_{i,j} f_i$ to niezmienniczość implikuje że $a_{i,j} + b_{i,j} = 0$.

6. Niech A będzie algebra Liego zwartej grupy Liego G i niech T będzie maksymalną spójną abelową podgrupą G. Pokazać że algebra Liego T jest podalgebrą Cartana w A.

7. W grupie $G = SU(n)$ znaleźć maksymalą spójną podgrupę przemienną T i jej algebrę Liego. Wyznaczyć $\tilde{W} = \{g \in G : gTg^{-1} = T\}$. Jak $\tilde{W}$ działa na algebrze Liego T?