1. Niech A będzie półprostą algebrą Liego nad ciałem liczb zespolonych, niech G będzie (zespoloną) spójną grupą Liego z algebrą Liego A. Oznaczmy przez $\mathrm{Int}(A)$ podgrupę grupy automorfizmów A odpowiadajacych automorfizmom wewnętrznym G (tzn. $i_g(x) = gxg^{-1}$, $\phi(g) = Di_g|_{x=e}$, $\mathrm{Int}(A) = \phi(G)$). Pokazać że $\mathrm{Int}(A)$ jest generowana przez elementy postaci $\exp(\mathrm{ad}_x)$ dla $x \in A$ takich że ad_x jest nilpotentny.

Wskazówka: Zrobić to najpierw dla grupy $SL(2, \mathbb{C})$

2. Algebra Liego $\mathbf{sl}(2, F)$ jest generowana przez elementy H, X, Y takie że $H = [X, Y]$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$. Niech M będzie modułem prostyn dla $\mathbf{sl}(2, F)$ i niech $v \in M$ będzie wektorem własnym H. Pokazać że M jest rozpinany przez $\{v\} \cup \{X^k v : k > 0\} \cup \{Y^k v : k > 0\}$. Jeśli M jest skończenie wymiarowy a F jest algebraicznie domknięte charakterystyki 0 to istnieje v taki v jest wektorem własnym H i $Xv = 0$. Niech λ będzie wartością własną H odpowiadającą v, tzn. $Hv = \lambda v$ i niech $v_k = Y^k v$. Pokazać że $Hv_k = (\lambda - 2k)v_k$ i wywnioskować stąd że $\sum(\lambda - 2k)$ gdzie suma jest po takich k że $v_k \neq 0$. Pokazać że suma jest równa 0 tylko wtedy gdy $\lambda = m$ gdzie m jest maksymalnym k takim że $v_k \neq 0$. Wywnioskować stąd że M jest izomorficzny z jednym z modułów z zadnia 1 z listy 8. Ponadto $Tr_M(H^2) > 0$. Uzasadnić że wynik pozostaje prawdziwy bez założenia algebraicznej domkniętości F.

3. Niech A będzie skończenie wymiarową skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 z podalgebrą Cartana C, zaś M będzie modułem skończenie wymiarowym nad A. Niech elementy $h_\alpha \in C$ będą zdefiniowane jak na wykładzie. Pokazać że $Tr_M(h_\alpha^2)$ jest liczbą całkowitą dodatnią.

4. Pokazać że skończenie wymiarowy moduł Liego nad skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0 jest sumą prostą modułów prostych.

Wskazówka: Użyć formę K_V z zadania 1 listy 10. Niezerowość formy wynika z zadnia 3.

5. Riemannowską przestrzenią symtetryczną nazywany spójną rozmaitość Riemanna M taką że dla że dla każdego $x \in M$ istnieje gładka izometia $\sigma_x : M \mapsto M$ taka że $\sigma_x = x$, $\sigma_x^2 = \mathrm{id}_M$, istnieje otoczenie V_x punktu x, takie że $\sigma_x(V_x) = V_x$ i x jest jedynym punktem stałym σ_x na V_x. Niech G będzie grupą izometrii M. Pokazać że przy tych założeniach G jest grupą Liego i działa tranzytywnie na M. Niech K będzie stabilizatorem ustalonego punktu $x \in M$. Wtedy M jest dyfeomorficzne z G/K zaś K jest zwarte. Ponadto $g \mapsto \psi(g) = \sigma_x g \sigma_x$ jest automorfizmem G takim że $\psi^2 = \mathrm{id}_G$. Niech ϕ będzie pochodną ψ w identyczości G. Wtedy algebra Liego $\mathbf{g}$ grupy G ma rozkład $\mathbf{g} = \mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ gdzie $\mathbf{k}$ jest podprzestrzenią punktów stałych ϕ zaś $\mathbf{k}$ jest podprzestrzenią własną ϕ odpowiadającą wartości własnej -1. Przy tym $[\mathbf{k}, \mathbf{k}] \subset \mathbf{k}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{p}] \subset \mathbf{p}$ i $[\mathbf{p}, \mathbf{p}] \subset \mathbf{k}$. Ponadto $\mathbf{k}$ jest algebrą Liego K.

Wskazówka: Aby pokazać tranzytywność rozważyć bliskie x i y i geodetykę łączącą x z y. Jeśli z jest punktem geodetyki równo odległym od x i od y to $\sigma_z(x) = y$.

6. Pokazać że jeśli $\mathbf{g}$ jest algebrą Liego grupy Liego G, zaś ϕ jest automorfizmen $\mathbf{g}$ takim że $\psi^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{g}}$, $\mathbf{k}$ i $\mathbf{p}$ zdefinujemy jak w zadaniu wyżej i $\mathbf{k}$ jest algebrą Liego zwartej podgrupy K, to G/K można zaopatrzyć w strukturę Riemannowskiej przestrzeni symetrycznej. W takim przypadku parę $(\mathbf{g}, \mathbf{k})$ nazywamy Riemannowską parą symetryczną.