1. Wyznaczyć podalgebrę Cartana i układ pierwiastków dla kompleksyfikacji algebr Liego grup $SU(3)$, $SO(5)$ i $Sp(2)$. Grupę $Sp(n)$ definiujemy jako podgrupę $SU(2n)$ składającą się z elementów komutujących z operatorem J zadanym wzorem $J(x,y)=(-y,x)$ dla $x,y\in\mathbb{C}^n$. $Sp(n)$ ma układ pierwiastków C_n dla $n\geq 2$.

Definicja: Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową z dodatnio określonym iloczynem skalarnym nad pewnym podciałem ciała liczb rzeczywistych. $\Lambda\subset V-\{0\}$ jest układem pierwiastków jeśli Λ jest skończony, rozpina V i jest niezmienniczy na odbicia wzgędem swoich elementów, tzn. dla dowolnego $\alpha\in\Lambda$ mamy $\sigma_\alpha(\Lambda)=\Lambda$. Układ pierwiastów nazwywamy krystalograficznym, jeśli dla dowolnych $\alpha,\beta\in\Lambda$ liczba $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ (gdzie (α,β) oznacza iloczyn skalarny) jest całkowita. Gdy $\Lambda_1\subset V_1$ i $\Lambda_2\subset V_2$ są układami pierwiastków to sumą ich prostą nawywamy układ pierwiastków w $V_1\oplus V_2$ (z naturalym iloczynem skalarnym) otrzymany jako suma obrazów Λ_1 i Λ_2 przez naturalne włożenia. Układ pierwiastków nazywamy nierozkładalnym gdy nie da się go przedstawić jako sumę prostą.

2. Niech $\Lambda\subset V$ będzie układem pierwiastków i niech V_1 będzie podprzestrzenią V. Pokazać że $\Lambda\cap V_1$ jest albo puste albo jest układem pierwiastów dla pewnej podprzestrzeni V_1. W szczególności niech $\alpha,\beta\in\Lambda$ będą liniowo niezależne i niech $V_{\alpha,\beta}=\mathrm{lin}\{\alpha,\beta\}$. Wtedy $\Lambda\cap V_{\alpha,\beta}$ jest układem pierwiastków.

Definicja: Dla $\alpha\in\Lambda$ niech $e_\alpha=\alpha/|\alpha|$.

3. Niech Λ będzie układem pierwiastów w przestrzni dwuwymiarowej nad $\mathbb{R}$. Pokazać że e_α są wierzchołkami $2n$-kąta foremnego dla pewnego $n\in Z$. Ponadto pokazać że grupa generowana przez odbicia względem elementów Λ ma na $\{e_\alpha\}$ co najwyżej dwie orbity.

4. Pokazać że układ pierwiastków $\Lambda\subset V$ jest krystalograficzny wtedy i tylko wtedy gdy moduł nad liczbami całkowitymi rozpinany przez Λ jest dyskretnym podzbiorem V.

Wskazówka: Aby pokazać że układ jest krystalograficzny rozważyć podukład w przestrzeni dwuwymiarowej.

5. Pokać że $\{e_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ jest układem pierwiastków. Podać przykład gdy Λ jest układem krystalograficznym, ale $\{e_\alpha$ nie tworzą układu krystalograficznego.

Definicja: Niech $\omega\in V$ będzie wektorem takim że $(\alpha,\omega)\neq 0$ dla $\alpha\in\Lambda$, $\Lambda_+=\{\alpha\in\Lambda:(\alpha,\omega)>0\}$. Λ_+ nazywamy zbiorem pierwiastków dodatnich. Kierunkiem ekstemalnym stożka wypukłego S nazyway taki element $v\in S$ że v nie daje się przedstawić jako kombinacja wypukła elementów S nie będących wielokrotnościami v. Niech $\Delta\subset\Lambda_+$ będzie zbiorem tych elementów Λ_+ które dają wszystkie kierunki ekstremalne stożka wypukłego generowanego przez Λ_+. Jeśli jest więcej niż jeden wektor z Λ_+ o danym kierunku ekstremalnym to wybieramy najkrótszy. Δ nazywamy zbiorem pierwiastków prostych.

Uwaga: Zbiór Λ_+ zależy od ω, ale różne wybory dają równoważne własności.

6. Pokazać że dla $\alpha,\beta\in\Delta$ mamy $(\alpha,\beta)\leq 0$. Ponadto kąt pomiędzy α a β to $(n-1)\pi/n$ dla pewngo $n\in\mathbb{Z}$. Wywnioskować stąd że Δ jest bazą V.

Wskazówka: Rozważyć układ dwuwymiarowy w podprzestrzni rozpinanej przez α i β.

Definicja: Diagramem Coxetera-Dynkina (lub krótko diagramem Dynkina) związanym z Λ nazywany graf którego wierchołkami są elementy Δ zaś krawędzię są pomiędzy takimi $\alpha,\beta\in\Delta$ że $(\alpha,\beta)<0$. Przy tym krawędzi przypisujemy wagę n jeśli kąt pomiędzy α a β to $(n-1)\pi/n$.

7. Pokazać że diagram Coxetera-Dynkina nie zwiera cykli.

Wskazówka: Jeśli α_i dla $i = 1, \ldots, k$ stanowią cykl, to niech $v = \sum_{i=1}^{k} e_{\alpha_i}$. Pokazać że wtedy $(v, v) \leq 0$.

8. Dla $\alpha, \beta \in \Delta$ niech $q_{\alpha,\beta} = (e_\alpha, e_\beta)$. Niech $S \subset \Delta$, $\alpha \notin S$. Pokazać że wtedy $\sum_{\beta \in S} q_{\alpha,\beta}^2 < 1$

Wskazówka: Można zakładać że $q_{\alpha,\beta} \neq 0$. Wywnioskować stąd że $q_{\beta_1,\beta_2} = 0$ dla $\beta_1, \beta_2 \in S$.

9. Pokazać że diagram Coxetera-Dynkina jest spójny wtedy i tylko wtedy gdy układ pierwiastków jest nierozkładalny.

10. Pokazać że spójny diagram Dynkina z krawędzią wagi ≥ 6 ma dwa wierzchołki.

Wskazówka: Użyć wynik zadania 7.

11. Pokazać że wierzchołek diagramu Dynkina jest połączony z co najwyżej trzema innymi wierzchołkami. Jeśli jest połączony z trzema wierzchołkami to wagi krawędzi to 3. Żaden wierzołek nie należy do dwu krawędzi wagi ≥ 4.

12. Spójny diagram Dynkina zawiera co najwyżej jeden punkt rozgałęzienia i co najwyżej jedną krawędź wagi ≥ 4. Jeśli jest punkt rozgałęzienia to wszystkie wagi to 3.

13. Jeśli jest krawędź wagi 5 to jest ona na końcu, a diagram ma co najwyżej 4 wierzchołki.

14. Jeśli krawędz wagi 4 nie jest na końcu, to są tylko 4 wierzchołki.

15. Jeśli jest punkt rozgałęzienia, to jedno z odgałęzień ma długość 1, a drugie długość co najwyżej 2.

16. Jeśli jest punkt rozgałęzienia i jedno z odgałęzień ma długość 2, to najdłuższe odgałęzienie ma długość 4.

Definicja: Groupą Weyla W nazywamy grupę generowaną przez odbicia względem elementów układu pierwiastków. Niech

$$U = \{x \in V : (x, \alpha) = 0 \quad \text{dla pewnego } \alpha \in \Lambda\}$$

Komórką Weyla nazywamy składową spójną U.

17. Pokazać że $\{x \in V : (x, \alpha) > 0 \text{dla } \alpha \in \Delta\}$ jest komórką Weyla.

18. Pokazać że grupa generowana przez odbicia względem pierwiastków prostych Δ (a więc również grupa Weyla W) działa tranzytywnie na zbiorze komórek Weyla. Wywnioskować stąd że diagram Coxetera-Dynkina jest jednoznacznie wyznaczony przez układ pierwiastków (nie zależy od wybranego porządku).

Wskazówka: Niech F będzie sumą fragmentów kowymiaru 2 scian komórek Weyla. Sprawdzić że $V - F$ pozostaje spójne, zaś orbita domknięcia komórki Weyla jest zarówno otwarta jak i domknięta w $V - F$.

19. Pokazać że grupa Weyla W jest generowana przez odbicia względem pierwiastków prostych Δ.

Wskazówka: W wymiarze 2 pokazać to bezpośrednio. Dla wyższych wymiarów rozważyć najpierw pierwiastki leżące na brzegu stożka rozpinanego przez Δ.

Definicja: Układ pierwiastków Λ nazywamy zredukowanym jeśli dla dowolego $\alpha \in \Lambda$ mamy $\{t \in \mathbb{R} : t\alpha \in \Lambda\} = \{-1, 1\}$

20. Pokazać że zredukowany układ pierwiastków jest jednoznacznie wyznaczony przez długości pierwiastków prostych i diagram Coxetera-Dynkina.

21. Pokazać że jeśli układ pierwiastków jest krystalograficzny to każdy pierwiastek ma taką długość jak pewien pierwiastek prosty. Jeśli układ jest nierozkładalny to są co najwyżej dwie długości.