1. Parę grup (G, K) gdzie G jest lokalnie zwarta zaś K jest zwarta nazywamy parą Gelfanda jeśli algebra splotowa funkcji dwustronnie K niezmienniczych (tzn. spełniających warunek $\forall_{x\in G, k_1, k_2 \in K} f(x) = f(k_1 x k_2)$) jest przemienna. Pokazać że jeśli dla dowolnego $x \in G$ zachodzi $x^{-1} \in KxK$ to para (G, K) jest parą Gelfanda. Pokazać że jeśli para grup Liego (G, K) jest Riemannowską parą symetryczną (tzn. para ich algebr Liego spełnia warunek z zadania 6 z listy 11), to spełniony jest warunek powyżej i para (G, K) jest parą Gelfanda.

2. Grupa $SO^+(n, 1)$ to spójna składowa jedynki w grupie macierzy rzeczywistych zachowujących formę kwadratą o sygnaturze $(n, 1)$. Pokazać że naturalne włożenie $SO(n)$ w $SO^+(n, 1)$ daje maksymalną podgrupę zwartą w $SO^+(n, 1)$. Pokazać że para $(SO^+(n, 1), SO(n))$ z automorfizmem $\psi(x) = (x^{-1})^{\mathrm{T}}$ gdzie x^{T} oznacza transpozycję jest parą symetryczną. Opisać rozkład algebry Liego na podprzestrzenie $\mathbf{k}$ i $\mathbf{p}$. Pokazać że maksymalne podprzestrzenie abelowe w $\mathbf{p}$ są jednowymiarowe.

3. Niech L_1 będzie podzbiorem w $\mathbb{R}^8$ składającym się z wektorów o współczynnikach całkowtych, takich że suma składowch $\sum x_i$ jest parzysta. Niech $L_3 = L_1 + \mathbb{Z}w$ gdzie $w = (1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$. Pokazać że L_3 jest dyskretną podgrupą $\mathbb{R}^8$ i że dla dowolnych $v_1, v_2 \in L_3$ mamy $(v_1, v_2) \in \mathbb{Z}$. Niech $\Lambda = \{v \in L_3 : (v, v) = 2\}$. Opisać elementy Λ. Pokazać że Λ jest układem pierwiastków z diagramem Dynkina E_8 i że Λ ma 240 elementów.