1. Pokazać że jeśli G jest grupą Liego z gładkim mnożeniem zaś L jest algebrą Liego G to mnożenie w G w pewnym otoczeniu jedynki we współrzędnych exponencjalnych jest zadane wzorem Campbella-Bakera-Hausdorffa.

Wskazówka: Pokazać że wzór zadaje lokanie zdefiniowane działanie które jest łączne o ile odpowienie produkty są dobrze zdefiniowane (jest to tak zwana lokalna grupa Liego). Potem użyć twierdzenie Frobeniusa, podobnie jak w dowodzie o istnieniu podgrupy i jedyności grupy związanej z algebrą.

Uwaga1: To pokazuje że na gładkiej grupie Liego można wprowadzić strukturę analityczną.

Uwaga2: Jeśli L jest przestenią Banacha zaś komutator jest ciągły to wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa zadaje szereg zbieżny w pewnym otoczeniu 0 w L. Jednakże, istnieją nieskończenie wymiarowe L takie że nie odpowiada im grupa Banacha-Liego (rozmaitość Banacha z analitycznym mnożeniem), a więc sama zbieżność szeregu nie wystarcza do pokazania istnienia grupy.

2. Dla algebry nilpotentej nad $\mathbb{R}$ szereg Campbella-Bakera-Hausdorffa jest wielomianem co implikuje istnienie grupy. Dla algebr długości 2 i 3 podać jawny wzór (tzn. pomijający wyrazy szeregu równe zeru dla takich algebr).

3. Niech X będzie zbiorem, N będzie przestrznią wektorową nad $\mathbb{Q}$ z bazą X, $T[[N]] = \prod_n N^{\oplus n}$ będzie uzupełnieniem algebry tensorowej, $LV[[N]]$ będzie uzupełnieniem podalgebry Liego $T[[N]]$ generowanej przez N. W $LV[[N]]$ wprowadzamy mnożenie wzorem Campbella-Bakera-Hausdorffa, tzn

$$xy = \log(\exp(x)\exp(y))$$

gdzie po prawej stronie mamy mnożenie w $T[[N]]$. Pokazać że podgrupa G grupy otrzymanej z $LV[[N]]$ z tym działamiem, generowana przez X jest grupą wolną, tzn, dowolne odwzorowanie X w grupę H przedłuża się jednoznacznie do homomorfizmu G w H.

Wskazówka: Pokazać że każdy element G może być jednoznacznie zapisany w postaci $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ gdzie $x_i \in X$, $x_i \neq x_{i+1}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \neq 0$. Dla jednoznaczności rozwinąć $\exp(k_i x_i)$ w szereg i zauważyć że produkt szeregów nie może być równy 1.

4. Niech L będzie nilpotentną algebrą Liego stopnia nilpotentności l nad pierścieniem R takim że $l!$ jest odwracalne we R. Wtedy szereg Campbella-Bakera-Hausdorffa daje dobrze zdefiniowane mnożenie w L. Pokazać że jeśli I jest ideałem w L to względem tego mnożenia I jest podgrupą normalną. Odwrotnie, jeśli R jest ilorazem $\mathbb{Z}$ to każda podgrupa normalna L jest tej postaci.

Wskazówka: Niech T będzie podgrupą zaś I generowaną przez nią algebrą i niech $I_1 = I$, $I_{K+1} = [I, I_k]$. Indukcyjnie pokazać że $T + I_k$ jest podmodułem nad $\mathbb{Z}$, i że $I = T + I_k$.

Definicja: Niech G będzie dowolną grupą zaś M i N będą jej podgrupami. Komutator $[M, N]$ definujemy jako podgrupę G generowaną przez elementy postaci $ghg^{-1}h^{-1}$ dla $g \in M$, $h \in G_k$. Zstępujący ciąg centralny G_n definujemy następująco: $G_1 = G$ zaś $G_{k+1} = [G, G_k]$.

5. Sprawdzić że jeśli H, M, N są podgrupami normalnymi w G to $[[H, M], N] \subset [[M, N], H][[H, N], M]$

6. Pokazać że G_k jest podgrupą normalną w G i G_k/G_{k+1} leży w centrum G/G_{k+1} (w szczególności G_k/G_{k+1} jest abelowe). Ponadto $[G_k, G_l] \subset G_{k+1}$.

Wskazówka: Ostatni wzór pokazujemy indukcyjnie przy pomocy zadania 3.

7. Niech $W_k = G_k/G_{k+1}$ i $W = \oplus_k W_k$. Zakładamy że G jest grupą nilpotentną. Pokazać że na W można zadać strukturę algebry Liego nad $\mathbb{Z}$ tak że dla $[x] \in W_k$, $[y] \in W_l$ mamy $[[x],[y]] = [xyx^{-1}y^{-1}] \in W_{l+k}$.

8. Niech $H = LV[[N]]$ gdzie jak w zadaniu 3 na $LV[[N]]$ mnożenie wprowadzamy wzorem Campbella-Bakera-Hausdorffa i niech γ_l będzie podzboprem $LV[[N]]$ składajacym się z szeregów których składowe jednorodne rzędu mniejszego niż k są zerami. Pokazać że $H_k \subset \gamma_k$ i że dla dowolnego $l > k$ zachodzi $(H_k + \gamma_l)/(H_{k+1} + \gamma_l) = LV[N]_k$ gdzie $LV[N]_k$ jest zbiorem elementów $LV[[N]]$ które są tensorami jednorodnymi rzędu k. Ponadto dla grupy G z zadania 3 zachodzi $G_k = G \cap \gamma_k$.

Wskazówka: H/γ_{k+1} jest grupą nilpoteną stopnia nilpotentności k. G_{k+1} leży w jądrze dowolnego homomorfizmu z G w grupę nilpoteną stopnia nilpotentności k.

9. Niech G będzie grupą nilpotentną. Zakładamy dodatkowo że G jest podzielna i beztorsyjna, tzn. dla dowolnego $x \in G$ i całkowtego $n > 0$ istnieje $y \in G$ taki że $y^n = x$. Pokazać że wtedy algebrę Liego W grupy G zdefiniowana w zadaniu 7 można potraktować jako algebrę Liego nad liczbami wymiernymi zaś G jest izomorficzna z grupą otrzymaną przy pomocy wzoru Campbella-Bakera-Hausdorffa z W. W szczególności takie grupy są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy ich algebry Liego są izomorficzne.

Wskazówka: Niech X będzie bazą W_1 nad $\mathbb{Q}$. Z zadania 3 wywnioskować że istnieje homomorfizm z podgrupy $LV[[W_1]]$ generowanej przez W_1 na G. Resztę dostać z zadań 8 i 4.

10. Niech G będzie skończoną p-grupą (tzn. G ma p^k elementów dla pownego k) stopnia nilpotentności $l < p$. Zauważyć że na algebrze Liego W grupy G wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa zadaje strukturę grupy i że G jest izomorficzna z W.

Wskazówka: Zadanie 8 pokazuje że G jest ilorazem "wolnej"grupy nilpotentnej stopnia nilpotentności l. Tą grupę można traktować jako podgrupę wolnej algebry nilpotenej nad pierścieniem $\mathbb{Z}/(p^k\mathbb{Z})$.

11. Niech N będzie modułem wolnym nad pierścieniem R. Niech $LV[N]$ będzie podalgebrą Liego $T(N)$ generowną przez N. Pokazać że dowolne odwzorowanie liniowe z N w $LV[N]$ można jednoznacznie przedłużyć do różniczownia $LV[N]$.

Wskazówka: Najpierw zdefiniować różniczkowanie $T(N)$.