1. Na $\mathbb{R}^n$ wprowadzamy topologie Zariskiego przyjmując że zbiory domkniete do dokładnie te zbiory które są zbiorami wspólnych zer układu wielomianów. Na podzborach $\mathbb{R}^n$ topologię Zariskiego wprowadzamy jako topologię podprzestrzeni. Pokazać że jeśli U jest zbiorem otwartym w topologii Zariskiego, f jest funkcją wymierną, taką że mianownik f jest różny od 0 na U to f jest ciągła w topologi Zariskiego (tzn. przeciwobrazy zbiorów domkniętch w topologi Zariskiego przez f są domknięte w topologi Zariskiego). Pokazać że jeśli na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wprowadzimy produkt toplogii Zariskiego to dodawanie będzie nieciągłe. Pokazać że jeśli grupa G jest podzbiorem domkniętym $\mathbb{R}^n$ w topologi Zariskiego zaś działania grupowe na G są zadane przez funkcje wymierne których mianowniki są różne od zera na G to mnożenie jest ciągłe z $G \times G$ z topologią Zariskiego odziedziczoną z $\mathbb{R}^{2n}$ w G (z topologią Zariskiego).

Defincja. Ogólną algebrę Liego definiujemy następująco: algebra Liego nad pierścieniem R to moduł nad R z operacją $[x, y]$ (nawiasem Liego) spełniającym:

$$[c_1x_1 + c_2x_2, y] = c_1[x_1, y] + c_2[x_2, y]$$

$$[x, c_1y_1 + c_2y_2] = c_1[x, y_1] + c_2[x, y_2]$$

$$[x, y] = -[y, x]$$

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

Pierwsze dwa warunki to dwuliniowość, trzeci to antysymetria (w charakterystyce 2 należełoby pisać $[x, x] = 0$), zaś czwarty nosi nazwę tożsamości Jacobiego. Najczęściej będzimy rozważać algebry Liego które są skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałami.

Operacja D jest różniczkowaniem algebry Liego A jeśli D jest R-liniowe i spełnia wzór Leibnitza: $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$.

2. Sprawdzić że jeśli A jest (raczej nieprzeminną) algebrą łączną nad R to A z nawiasem Liego wprowadzonym wzorem $[X, Y] = XY - YX$ jest algebrą Liego. (W szczególności algebra Liego grupy Liego tak jak definiowaliśmy ją na wykładzie jest algebrą Liego).

Komentarz: Razem z zadaniem 7 z listy 1 pokazuje to że różniczkowania algebry łącznej (lub algebry Liego) tworzą algebrę Liego.

3. Sprawdzić że suma prosta algebr Liego A_1 i A_2 zdefinowana jako ich suma prosta jako modułów z nawiasem Liego po składowych $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$ jest algebrą Liego. Sprawdzić że jeśli B jest R-liniowym odwzorowaniem z A_1 w różniczkowania A_2 spełniającym $B([x, y]) = B(x)B(y) - B(y)B(x)$ (tzn. B jest homomorfizmem algebr Liego) to wzór

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], -(B(y_1))x_2 + (B(x_1))y_2 + [y_1, y_2])$$

zadaje nawias Liego na sumie prostej A_1 i A_2 jako modułów. Sumę prostą A_1 i A_2 jako modułów z takim nawiasem Liego nazywamy produktem półprostym algebr Liego. Oczywiście produkt półprosty zależy od wyboru odwzorowania B.

4. Pokazać że algebra Liego A jest produktem półprostym wtedy i tylko wtedy gdy A zawiera dwa podmoduły A_1 i A_2 takie że $A = A_1 \oplus A_2$ jako moduł, A_1 jest podalgebrą (tzn. dla $x, y \in A_1$ również $[x, y] \in A_1$) i dla $x \in A$, $y \in A_2$ mamy $[x, y] \in A_2$.

5. Niech A będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią wektorową z bazą $X, Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$. Na A zadajemy nawias Liego wzorem $[X, Y_i] = -[Y_i, X] =$

Y_{i+1} zaś $[Y_i, Y_j] = 0$. Sprawdzić że to nam zadaje algebrę Liego i że A jest generowana przez X i Y_1 (tzn. najmniejsza podalgebra Liego A zawierająca X i Y_1 jest równa A).

6. Niech $Df = \partial_x^2 f$, $Mf(x) = x^2 f(x)$, $Jf(x) = 2x(\partial_x f)(x) + f(x)$. Pokazać że operatory D, M, J rozpinają rzeczywistą algebrę Liego (z komutatorem jako nawiasem Liego). Podobnie iD, iM, J rozpinają rzeczywistą algebrę Liego. Sprawdzić że te dwie algebry są izomorficzne z algebrą macierzy 2×2 o śladzie 0.