

1. Pokazać że dla grup macierzowych odwzorowanie \exp z algebry Liego w grupę jest wyznaczone przez macierzową funkcję wykładniczą:

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

2. Wyznaczyć obraz odwzorowania eksponencjalnego w grupie $SL(2, \mathbb{R})$ rzeczywistych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1.

3. Pokazać że jeśli grupy Liego G_1 i G_2 mają strukturę rzeczywistą analityczną (tzn. przejścia między mapami rozwijają się lokalnie w zbieżny szereg potęgowy), zaś h jest ciągłym homomorfizmem z G_1 do G_2 to h jest rzeczywiście analityczny.

4. Przypominam że dla x z algebry Liego A operator ad_x jest zdefiniowany wzorem $\text{ad}_x(y) = [x, y]$. Wyznaczyć wartości i wektory własne operatora ad_x dla A będącego algebrą macierzy n na n i x będącego macierzą diagonalną. Pokazać że w algebrze $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ macierzy rzeczywistych o śladzie 0 nie ma podprzestrzeni niezmienniczych różnych od całej algebry i $\{0\}$ wspólnych dla wszystkich operatorów ad_x .

Komentarz: Takie algebry nazywamy algebrami prostymi.