1. Pokazać że spójna grupa Liego jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy jej algebra Liego jest nilpotentana.

2. Pokazać że jeśli algebra Liego G jest nilpotentna i $G/[G, G]$ jest generowane przez $x_1, \ldots, x_n$ to $x_1, \ldots, x_n$ także generują G.

3. Pokazać że nilpotentna algebra Liego ze skończonym zbiorem generatorów jest skończenie wymiarowa.

Definicja: Formę dwuliniową B na algebrze Liego A nazywamy niezmienniczą jeśli dla każdych $x, y, z \in A$ zachodzi $D([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0$.

4. Pokazać że jeśli A jest algebrą Liego spójnej grupy Liego G to forma dwuliniowa B na A jest niezmiennicza na A wtedy i tylko wtedy gdy jest niezmniennicza na działanie Ad. Wywnioskować stąd że jeśli G jest zwarta to na A istnieje dodatnio określony niezmienniczy iloczyn skalarny.

5. Pokazać że jeśli B jest dwuliniową formą niezmienniczą na A, zaś I jest ideałem w A, to zbiór $I^\perp = \{x \in A : \forall_{y \in I} B(x, y) = 0\}$ jest ideałem. Wywnioskować stąd i z poprzedniego zadania że jeśli podalgebra S algebry Liego zwartej grupy Liego jest rozwiązalna, to S jest przemienna.

6. Pokazać że algebra Liego A skończonej długości zawiera maksymalny ideał nilpotentny, tzn. taki ideał nilpotentny N że dowoly ideał nilpotentny A jest zawarty w N.

Przypominam że uniwersalna algebra obwiednia algebry Liego A jest zdefiniowana jako taka algebra łączna $E(A)$ z odwzorowaniem $\iota : A \mapsto E(A)$ które jest homomorfizmen z A w $E(A)$ traktowane jako algebra Liego (z komutatorem jako nawiasem Liego), że każdy homomorfizm h z A w algebrę łączną B traktowaną jako algebrę Liego jest postaci $h = g \circ \iota$ gdzie g jest homomorfizmem $E(A)$ w B (homomorfizm algber łacznych).

7. Niech A będzie algebrą Liego która jest modułem wolnym z bazą $\{e_i\}_{i \in I}$ nad pierścieniem podstawowym R. Zakładamy że na I zadany jest porządek liniowy. Pokazać że elementy postaci

$$\iota(e_{i_1})\iota(e_{i_2}) \ldots \iota(e_{i_n})$$

gdzie $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$ stanowią generują $E(A)$ (ciąg pusty daje jedynkę).

8. Niech G będzie grupą Liego z algebrą Liego L, i niech D będzie algebrą operatorów różniczkowych na G niezmienniczych na przesunięcia z prawej strony (mnożenie to składanie operatorów). Pokazać że algebra obwiednia $E(L)$ jest izomorficzna z D.

Wskazówka: Rozpatrzyć działanie elementów D na jednomiach w układzie wpółrzędnych.

Przypominam definicję:

Definicja: Algebra Liego $\mathbf{g}$ jest prosta jeśli jedyne podprzestrzenie $\mathbf{g}$ niezmiennicze na działanie wszystkich operatorów ad_x, $x \in \mathbf{g}$ to $\mathbf{g}$ i $\{0\}$.

9. Pokazać że jeśli G jest grupą Liego z prostą algebrą Liego, to istnieje k takie że dla każdego $x \in G$ który nie należy do centrum G dla F zadanego równością $F = A_G x = \{gxg^{-1} : g \in G\}$ zbiór $(FF^{-1})^k$ zawiera otoczenie e w G.

Wskazówka: F zawiera krzywą gładką.

10. Pokazać że jeśli G jest spójną grupą Liego z prostą algebrą Liego, to każdy właściwy dzielnik normalny G jest zawarty w centrum G.

11. Pokazać że jeśli G jest grupą zwartą, U jest otoczeniem e w G, k jest liczbą naturalną, to istnieje otoczenie e V takie że $((A_G V)(A_G V)^{-1})^k \subset U$.

12. Pokazać że jeśli G_1 jest grupą Liego z prostą algebrą Liego zaś G_2 jest jest grupą zwartą to każdy (algebraiczny) homomorfizm z G_1 do G_2 jest ciągły.