1. Pokazać że dla danego n i k istnieje wolna algebra nilpotentna $N_{n,k}$ długości co najwyżej k generowana przez n elementów. Dokładniej, $N_{n,k}$ jest taką algebrą Liego że dla dowolnej nilpotentnej algebry Liego B długości co najwyżej k i odwzorowania h ze zbioru generatorów $\{x_1, \ldots, x_n\}$ w B istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\tilde{h} : N_{n,k} \mapsto B$ takie że $h(x_i) = \tilde{h}(x_i)$. Dla skończonego n algebra $N_{n,k}$ jest skończenie wymiarowa.

Uwaga: Nilpotentność jest kluczowa żeby dostać skończony wymiar. Mianowicie, algebra A z zadania 5 z listy 2 jest nieskończnie wymiarową rozwiązalną algebra Liego o dwu generatorach. Przy tyme $[A, A]$ jest algebrą przemienną (takie algebry nazywamy metaabelowymi).

2. Pokazać że jeśli algebra Liego A jest sumą prostą algebr A_1 i A_2, to algebra obwiednia $E(A)$ jest izomorficzna z iloczynem tensorowym $E(A_1)$ i $E(A_2)$ z działaniem zadanym wzorem $(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = (x_1x_2) \otimes (y_1y_2)$.

3. Pokazać że jeśli L jest skończenie wymiarową algebrą rozwiązalną nad ciałem charakterystyki 0 to $[L, L]$ jest algebrą nilpotentą.

Wskazówka: Użyć twierdzenie (Liego) podane na wykładzie.

4. Pokazać że jeśli D jest różniczkowaniem skończenie wymiarowej rozwiązalnej algebry Liego L nad ciałem charakterystyki 0 to dla dowolnego $x \in L$ operator ad_{Dx} jest nilpotentny.

Wskazówka: Algebra różniczkowań generowana przez D i L jest rozwiązalna.

Przypominam że jeśli pierścień przemienny z jedynką S jest algebrą nad R, zaś G jest R-algebrą Liego to $S \otimes_R G$ posiada naturalną strukturę S-algebry Liego (mówimy że $S \otimes_R G$ jest otrzymane z G przez rozszerzenie skalarów). Jeśli S jest modułem wolnym nad R to G można naturalnie utożsamić z podzbiorem $S \otimes_R G$ (w ogólym przypadku dostaniemy naturalne "włożenie" które nie musi być różnowartościowe).

5. Opisać strukturę $S \otimes_R G$ jeśli R to liczby rzeczywiste zaś S to liczby zespolone. W szczególności, co wyjdzie jeśli G to:

- algebra rzeczywistych macierzy 2×2 o śladzie 0
- algebra zespolonych macierzy 2×2 o śladzie 0
- algebra zespolonych macierzy antyhermitowskich 2×2 o śladzie 0

6. Niech $\tilde{R} = R[X]/(X^2)$ (tzn. $\tilde{R}$ jest rozszerzeniem R o elemet x taki że $x^2 = 0$), L jest R-algebrą Liego i niech $\tilde{L} = \tilde{R} \otimes_R L$. Pokazać że jeśli D jest różniczkowaniem L, to wzór $A(s + xt) = s + x(t + D(s))$ gdzie $s, t \in L$ (zaś L utożsamiamy z podzbiorem $\tilde{L}$), zadaje automorfizm $\tilde{L}$. Ponadto, każdy automorfizm $\tilde{L}$ który jest tożsamością na $\tilde{L}/xL$ jest takiej postaci.

Algebrę Liego nazywamy półprostą jeśli nie zawiera nietrywialnych ideałów rozwiązalnych.

7. Pokazać że suma prosta algebr półprostych jest półprosta.

8. Niech ciało F będzie rozszerzeniem algebraicznym ciała K. Pokazać że algebra Liego A nad ciałem K jest półprosta wtedy i tylko wtedy gdy algebra $A_F = F \otimes_K A$ jest półprosta jako algebra Liego nad F.

Wskazówka: Aby pokazać że A_F jest półprosta wystarczy to zrobić w przypadku gdy rozszerzenie F/K jest skończone. Użyć wtedy poprzedniego zadania.