1. Algebra Liego $\mathbf{sl}(2,\mathbb{R})$ jest generowana przez elementy H, X, Y takie że $H = [X,Y]$, $[H,X] = 2X$, $[H,Y] = -2Y$. Niech v_k, $k = 0,\ldots,m$ będzie bazą przestrzeni $m+1$ wymiarowej przestrzeni V_m $(m \geq 1)$. Sprawdzić że wzory $Hv_k = (2k-m)v_k$, $Xv_k = (m-k)v_{k+1}$, $Yv_k = kv_{k-1}$ zadają na V_m strukturę modułu Liego nad $\mathbf{sl}(2,\mathbb{R})$. Moduł ten jest izomorficzny z naturalnym działaniem $\mathbf{sl}(2,\mathbb{R})$ na wielomianach jednorodnych stopnia m. Ponadto moduł ten jest prosty.

2. Produkt wolny R-algebr Liego A_1 i A_2 definujemy jako taką R-algebrę Liego B z włożeniami $\iota_i : A_i \mapsto B$, $i = 1,2$ że dla dowolnej R-algebry Liego C i dowolnych homomorfizmów R-algebr Liego $h_i : A_i \mapsto C$, $i = 1,2$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm R-algebr Liego $h : B \mapsto C$, taki że $h_i = h \circ \iota_i$. Uogólnić definicję na dowolną, niekoniecznie skończoną rodzinę algebr. Pokazać że produkt wolny istnieje. Ponadto pokazać że produkt wolny odpowiedniej liczby kopii pierścienia R traktowanego jako R-algebra Liego z zerowym komutatorem spełnia naturalną definicję wolnej algebry Liego (sformułować tą definicję).

Nilradykałem $\mathbf{s}$ algebry Liego L nazywamy podzbiór L taki że każdy element $s \in \mathbf{s}$ działa jak zero w każdym L-module prostym tzn.

$$\mathbf{s} = \{s \in L : \forall_V \forall_{v \in V} V \text{ jest prosty} \implies sv = 0\}$$

3. Dla skończenie wymiarowej algebry L pokazać że:

- jeśli algebra L jest półprosta to $\mathbf{s} = \{0\}$
- $\mathbf{s}$ jest ideałem rozwiązalnym
- jeśli algebra L jest abelowa to $\mathbf{s} = \{0\}$
- $\mathbf{s} \subset [L,L]$
- jeśli L jest rozwiązalan nad ciałem charakterystyki 0 to $\mathbf{s} = [L,L]$

4. Niech G będzie zwartą grupą Liego zaś A algebrą Liego G. Pokazać że

- A jest sumą prostą swoich ideałów
- A jest sumą prostą algebry półprostej i abelowej
- jeśli G jest jednospójna to A jest półprosta i każdy skończenie wymiarowy A-moduł Liego jest sumą prostą modułów prostych