1. Niech H_n będzie algebrą Heisenberga nad ciałem K charakterystyki 0, tzn. bazą H_n są elementy X_k, Y_k, $k = 1, \dots, n$ i Z zaś $[X_k, Y_k] = Z$. Niech $0 \neq \alpha \in K$. Definiujemy działanie H_n na wielomianach od $x_1, \dots, x_n$ wzorami: $X_k f = \partial_k f$, $Y_k = \alpha x_k f$, $Zf = \alpha f$. Sprawdzić że jest to dobrze zdefiniowane działanie. Pokazać że przy tym działaniu nie ma nietrywialnych podprzestrzeni niezmienniczych, tzn. $K[x_1, \dots, x_n]$ z tym działaniem jest H_n-modułem prostym. Ponadto, dla różnych α odpowiednie moduły są nieizomorficzne (innymi słowy, te działania nie są równoważne).

Komentarz: Wiemy że skończenie wymiarowe moduły proste nad algebrą rozwiązalną nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 są jednowymiarowe. To zadanie ilustruje że dostaniemy nietrywialne nieskończenie wymiarowe moduły proste.

2. Pokazać że jeśli $N \subset A \subset L$, N jest podalgebrą Cartana w L, A jest podalgebrą L, to N jest podalgebrą Cartana w A.

3. Algebra Liego L (nad ciałem liczb rzeczywistych) ma bazę X, Y, Z, T, S z relacjami $[X, Y] = Z$, $[X, T] = T$, $[Y, S] = S$ (pozostałe komutatory elementów bazy to 0). Pokazać jeśli a, b są dowolnymi ustalonymi liczbami to podalgebra generowana przez elementy postaci $X + aT, Y + bS, Z$ jest podalgebrą Cartana w L. Ponadto każda podalgebra Cartana L jest takiej postaci.

4. Niech L będzie skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem nieskończonym i C będzie algebrą Cartana w L. Pokazać że $L = C + [L, L]$.

5. Niech L będzie rozwiązalną algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 i niech N będzie podalgebrą Cartana w L. Wiemy że

$$L = N \oplus \bigoplus_f L_f = N \oplus W$$

gdzie f są funkcjonałami pierwiastkowymi zaś L_f odpowiednimi podprzestrzeniami pierwiastkowymi. Każde f rozszerzamy z N na L kładąc $f(x) = 0$ dla $x \in W$. Pokazać że tak rozszerzone f nie zależą od wyboru N.