Lista 10 (nadobowiązkowa)

W zadaniach 1-4 rozpatrujemy diagram Coxetera-Dynkina układu pierwiastków (być może niekrystalograficznego).

1. Pokaż że jeśli jest krawędź wagi 5 to jest ona na końcu, a diagram ma co najwyżej 4 wierzchołki.

2. Pokaż że jeśli krawędz wagi 4 nie jest na końcu, to są tylko 4 wierzchołki.

3. Pokaż że jeśli jest punkt rozgałęzienia, to jedno z odgałęzień ma długość 1, a drugie długość co najwyżej 2.

4. Pokaż że jeśli jest punkt rozgałęzienia i jedno z odgałęzień ma długość 2, to najdłuższe odgałęzienie ma długość 4.

5. Niech $\Lambda \subset V$ będzie układem pierwiastków i niech V_1 będzie podprzestrzenią V. Pokaż że $\Lambda \cap V_1$ jest albo puste albo jest układem pierwiastów dla pewnej podprzestrzeni V_1. W szczególności niech $\alpha, \beta \in \Lambda$ będą liniowo niezależne i niech $V_{\alpha,\beta} = \mathrm{lin}\{\alpha, \beta\}$. Wtedy $\Lambda \cap V_{\alpha,\beta}$ jest układem pierwiastków.

6. Niech L_1 będzie podzbiorem w $\mathbb{R}^8$ składającym się z wektorów o współczynnikach całkowtych, takich że suma składowch $\sum x_i$ jest parzysta. Niech $L_3 = L_1 + \mathbb{Z}w$ gdzie $w = (1/2, 1/2, \dots, 1/2)$. Pokaż że L_3 jest dyskretną podgrupą $\mathbb{R}^8$ i że dla dowolnych $v_1, v_2 \in L_3$ mamy $(v_1, v_2) \in \mathbb{Z}$. Niech $\Lambda = \{v \in L_3 : (v, v) = 2\}$. Opisz elementy Λ. Pokaż że Λ jest układem pierwiastków z diagramem Dynkina E_8 i że Λ ma 240 elementów.

Definicja: Groupą Weyla W nazywamy grupę generowaną przez odbicia względem elementów układu pierwiastków. Niech

$$U = \{x \in V : (x, \alpha) = 0 \quad \text{dla pewnego } \alpha \in \Lambda\}$$

Komórką Weyla nazywamy składową spójną U.

7. Pokaż że $\{x \in V : (x, \alpha) > 0 \quad \text{dla } \alpha \in \Delta\}$ jest komórką Weyla.

8. Pokaż że grupa generowana przez odbicia względem pierwiastków prostych Δ (a więc również grupa Weyla W) działa tranzytywnie na zbiorze komórek Weyla. Wywnioskuj stąd że diagram Coxetera-Dynkina jest jednoznacznie wyznaczony przez układ pierwiastków (nie zależy od wybranego porządku).

Wskazówka: Niech F będzie sumą fragmentów kowymiaru 2 scian komórek Weyla. Sprawdź że $V - F$ pozostaje spójne, zaś orbita domknięcia komórki Weyla jest zarówno otwarta jak i domknięta w $V - F$.

9. Pokaż że grupa Weyla W jest generowana przez odbicia względem pierwiastków prostych Δ.

Wskazówka: W wymiarze 2 pokaż to bezpośrednio. Dla wyższych wymiarów rozważ najpierw pierwiastki leżące na brzegu stożka rozpinanego przez Δ.

10. Pokaż że jeśli układ pierwiastków jest krystalograficzny to każdy pierwiastek ma taką długość jak pewien pierwiastek prosty (tzn. element Δ). Jeśli układ jest nierozkładalny to są co najwyżej dwie długości.