1. Na $\mathbb{R}^n$ wprowadzamy topologie Zariskiego przyjmując że zbiory domkniete do dokładnie te zbiory które są zbiorami wspólnych zer układu wielomianów. Na podzborach $\mathbb{R}^n$ topologię Zariskiego wprowadzamy jako topologię podprzestrzeni. Pokaż że jeśli U jest zbiorem otwartym w topologii Zariskiego, f jest funkcją wymierną, taką że mianownik f jest różny od 0 na U to f jest ciągła w topologi Zariskiego (tzn. przeciwobrazy zbiorów domkniętch w topologi Zariskiego przez f są domknięte w topologi Zariskiego). Pokaż że jeśli na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wprowadzimy produkt toplogii Zariskiego to dodawanie będzie nieciągłe. Pokaż że jeśli grupa G jest podzbiorem domkniętym $\mathbb{R}^n$ w topologi Zariskiego zaś działania grupowe na G są zadane przez funkcje wymierne których mianowniki są różne od zera na G to mnożenie jest ciągłe z $G \times G$ z topologią Zariskiego odziedziczoną z $\mathbb{R}^{2n}$ w G (z topologią Zariskiego).

2. Wyznacz podgrupy jednoparametrowe w grupie "ax + b".

3. Wyznacz obraz odwzorowania eksponencjalnego w grupie $SL(2, \mathbb{R})$ rzeczywistych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1.

Definicja: Operacja D jest różniczkowaniem algebry Liego A jeśli D jest R-liniowe i spełnia wzór Leibnitza: $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$.

4. Sprawdź że jeśli D_1 i D_2 są różniczkowaniami algebry Liego to ich komutator $D_1 D_2 - D_2 D_1$ też jest różniczkowaniem.

5. Sprawdź że jeśli A jest (raczej nieprzeminną) algebrą łączną nad R to A z nawiasem Liego wprowadzonym wzorem $[X, Y] = XY - YX$ jest algebrą Liego. (W szczególności algebra Liego grupy Liego tak jak definiowaliśmy ją na wykładzie jest algebrą Liego).

Komentarz: Razem z zadaniem 7 z listy 1 zadaniem 2 pokazuje to że różniczkowania algebry łącznej (lub algebry Liego) tworzą algebrę Liego.

6. Sprawdź że suma prosta algebr Liego A_1 i A_2 zdefinowana jako ich suma prosta jako modułów z nawiasem Liego po składowych $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$ jest algebrą Liego. Sprawdź że jeśli B jest R-liniowym odwzorowaniem z A_1 w różniczkowania A_2 spełniającym $B([x, y]) = B(x)B(y) - B(y)B(x)$ (tzn. B jest homomorfizmem algebr Liego) to wzór

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], -(B(y_1))x_2 + (B(x_1))y_2 + [y_1, y_2])$$

zadaje nawias Liego na sumie prostej A_1 i A_2 jako modułów. Sumę prostą A_1 i A_2 jako modułów z takim nawiasem Liego nazywamy produktem półprostym algebr Liego. Oczywiście produkt półprosty zależy od wyboru odwzorowania B.

7. Pokaż że algebra Liego A jest produktem półprostym wtedy i tylko wtedy gdy A zawiera dwa podmoduły A_1 i A_2 takie że $A = A_1 \oplus A_2$ jako moduł, A_1 jest podalgebrą (tzn. dla $x, y \in A_1$ również $[x, y] \in A_1$) i dla $x \in A$, $y \in A_2$ mamy $[x, y] \in A_2$.

8. Niech A będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią wektorową z bazą $X, Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$. Na A zadajemy nawias Liego wzorem $[X, Y_i] = -[Y_i, X] = Y_{i+1}$ zaś $[Y_i, Y_j] = 0$. Sprawdź że to nam zadaje algebrę Liego i że A jest generowana przez X i Y_1 (tzn. najmniejsza podalgebra Liego A zawierająca X i Y_1 jest równa A).

9. Niech $Df = \partial_x^2 f$, $Mf(x) = x^2 f(x)$, $Jf(x) = 2x(\partial_x f)(x) + f(x)$. Pokaż że operatory D, M, J rozpinają rzeczywistą algebrę Liego (z komutatorem jako nawiasem Liego). Podobnie iD, iM, J rozpinają rzeczywistą algebrę Liego. Sprawdź że te dwie algebry są izomorficzne z algebrą macierzy 2×2 o śladzie 0.