1. Pokazaż że jeśli grupy Liego G_1 i G_2 mają strukturę rzeczywistą analityczną (tzn. przejścia między mapami rozwijają się lokalnie w zbieżny szereg potęgowy), zaś h jest ciągłym homomorfizmem z G_1 do G_2 to h jest rzeczywiście analityczny.

2. Przypominam że dla x z algebry Liego A operator ad_x jest zdefiniowany wzorem $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$. Wyznacz wartości i wektory własne operatora ad_x dla A będącego algebrą macierzy n na n i x będącego macierzą diagonalną. Pokaż że w algebrze $\mathbf{sl}(n, \mathbb{R})$ macierzy rzeczywistych o śladzie 0 nie ma podprzestrzeni niezmienniczych różnych od całej algebry i $\{0\}$ wspólnych dla wszystkich operatorów ad_x.

Komentarz: Takie algebry nazywamy algebrami prostymi.

3. Pokaż że jeśli rzeczywista algebra Liego A zawiera element x taki że ad_x ma niezerową rzeczywistą wartość własną, to zawiera też podalgebrę Liego izomorficzną z algebrą Liego grupy przekształceń afinicznych prostej (grupy 'ax + b').

4. Niech $\mathbf{g}$ będzie algebrą Liego nad ciałem k charakterystyki 0. Zakładamy że D jest nilpotentnym różniczkowaniem $\mathbf{g}$. Nilpotentnym oznacza tu że D jest operatorem nilpotentnym, tzn. istnieje takie k że $D^k = 0$. Uzasadnij że wzór

$$\exp(tD) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tD)^k}{k!}$$

definiuje jednoparametrową grupę automorfizmów $\mathbf{g}$, tzn. $\exp(t_1 D) \exp(t_2 D) = \exp((t_1 + t_2)D)$ i przy ustalonym $t \in k$ odwzorowanie $\exp(tD)$ jest automorfizmem $\mathbf{g}$.

5. Uzasadnij że grupa zespolonych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1 ma nieciągły automorfizm.

6. Niech $\mathbf{g}$ będzie algebrą Liego nad pierścieniem z jedynką R i niech D będzie endomorfizmem $\mathbf{g}$ jako R-modułu. Niech $\tilde{\mathbf{g}}$ równa się $R \oplus \mathbf{g}$ jako R-moduł. Na $\tilde{\mathbf{g}}$ wprowadzamy operację $[\cdot, \cdot]$ wzorem

$$[(t, x), (s, y)] = (0, tDy - sDx + [x, y]).$$

Uzasadnij że D jest różniczkowaniem $\mathbf{g}$ wtedy i tylko wtedy gdy powyższa operacja zadaje nawias Liego (tzn. $\tilde{\mathbf{g}}$ jest algebrą Liego). Wskazówka: Połowa wynika z zadania z poprzedniej listy.

7. Niech $\tilde{R} = R[X]/(X^2)$ (tzn. $\tilde{R}$ jest rozszerzeniem R o elemet x taki że $x^2 = 0$), L jest R-algebrą Liego i niech $\tilde{L}$ będzie zbiorem formalnych sum postaci $a + xb$ gdzie $a, b \in L$ z naturalnymi działaniami. Sprawdź że $\tilde{L}$ jest algebrą Liego nad $\tilde{R}$. Pokaż że jeśli D jest różniczkowaniem L, to wzór $A(s + xt) = s + x(t + D(s))$ gdzie $s, t \in L$ (zaś L utożsamiamy z podzbiorem $\tilde{L}$), zadaje automorfizm $\tilde{L}$. Ponadto, każdy automorfizm $\tilde{L}$ który jest tożsamością na $\tilde{L}/xL$ jest takiej postaci.