1. Pokaż że przemienna grupa Liego jest produktem pewnej ilości prostych i okręgów.

2. Podobnie do rzeczywistych grup Liego można zdefinować zespolone grupy Liego: różniczkowalność jest w sensie zespolonym, algebra Liego jest nad liczbami zespolonymi. Pokaż że dla zespolonych grup Liego zachodzą twierdzenia o podgrupie i homomorfiźmie podane na wykładzie: jeśli mamy zespoloną podalgebrę to podgrupa jest zespolona, jeśli homomorfizm algebr jest zespolony to homomorfizm grup jest holomorficzny (różniczkowalny w sensie zespolonym).

3. Pokaż że w kontekście algebraicznym twierdzenia o podgrupie i homomorfiźmie przestają być prawdziwe: istnieje (zespolona) grupa macierzowa zadana układem równań algebraicznych i podalgebra Liego jej algebry Liego taka że odpowiednia podgrupa nie zadaje się układem równań. Podobnie, istnieją zespolone grupy algebraiczne G_1, G_2 przy tym G_1 jest jednospójna takie że algebry Liego są izomorficzne, ale homomorfizm G_1 w G_2 nie jest algebraiczny (potrzebuje funkcji przestępnych).

4. Które z następujących grup są jednospójne: grupa Heisenberga, grupa $SL(2,\mathbb{R})$ rzeczywistych macierzy 2 na 2 o wyznaczniku 1, grupa $SU(2)$ unitarnych macierzy 2 na 2 o wyznaczniku 1, grupa $SO(3)$ ortogonalnych macierzy 3 na 3 o wyznaczniku 1, grupa $SL(2,\mathbb{C})$ zespolonych macierzy 2 na 2 o wyznaczniku 1, grupa $SL(3,\mathbb{R})$ rzeczywistych macierzy 3 na 3 o wyznaczniku 1. Dla grup które nie są jednospójne opisz centrum grupy nakrywającej (jednospójnej grupy z tą samą algebrą).

Wskazówka: Macierze można zapisać w postaci OL gdzie O jest ortogonalne lub unitarne, zaś L jest macierzą trójkątną.

5. Indukcyjnie uzasadnij że $\mathbf{g}^k$ i $\mathbf{g}_k$ zdefiniowane przed definicjami algebr rozwiązalnych i nilpotennych są ideałami w $\mathbf{g}$. Uzasadnij że słowo "podalgebra" w definicji komutatora podalgebr podanej w notatkach przed definicjami $\mathbf{g}^k$ i $\mathbf{g}_k$ można by pominąć, tzn. biorąc podprzestrzeń liniową rozpinaną przez podane w definicji nawiasy Liego elementów otrzymamy te same $\mathbf{g}^k$ i $\mathbf{g}_k$.

6. Uzasadnij że rozwiązalna algebra Liego $\mathbf{g}$ zawiera ideał abelowy $\mathbf{a}$. Uzasadnij że skończenie wymiarowa rozwiązalna algebra Liego nad ciałem liczb rzeczywistych wymiaru co najmniej 2 zawiera podalgebrę (rozwiązalną) wymiaru 2 lub wymiaru 3. Uzasadnij że jeśli $\mathbf{g}$ jest nieprzemienna to algebrę wyżej można wybrać tak by była ona nieprzemienna. Opisz (sklasyfikuj) wszystkie rozwiązalne algebry Liego nad ciałami liczb rzeczywistych i zespolonych o wymiarze nie przekraczającym 3.

Wskazówka: W drugim i trzecim punkcie rozważ działanie ad na $\mathbf{a}$. Jeśli jest ono trywialne rozważ $\mathbf{g}/\mathbf{a}$.

7. Pokaż że skończenie wymiarowa rozwiązalna algebra Liego nad ciałem zawiera ideał kowymiaru 1. Wywnioskuj stąd że taka algebra Liego jest iterowanym produktem półprostym algebr jednowymiarowych. Podobnie, jednospójna grupa Liego z rozwiązalną algebrą Liego jest iterowanym produktem półprostym prostych.

Wskazówka: Każda podprzestrzeń zawierająca $[\mathbf{g},\mathbf{g}]$ jest ideałem.

8. Niech $H \subset G$ będzie podgrupą Liego. Zakładamy że G i H są spójne. Uzasadnij że jeśli algebra Liego H jest ideałem w G to automorfizmy wewnętrzne G działają w sposób ciągły na H.

Wskazówka: Użyj odwzorowanie wykładnicze by pokazać najpierw ciągłość w jedynce a potem prawe przesunięcia by dostać ciągłość w dowolnym punkcie.

9. Niech P będzie przestrzenią wielomianów na prostej. Ustalmy $k > 0$. Niech $\mathbf{n}$ będzie algebrą Liego (z komutatorem jako nawiasem Liego) operatorów na P generowną przez ∂_x i operatory mnożenia przez wielomiany stopnia nie przekraczającego k. Opisz $\mathbf{n}_l$. Uzasadnij że $\mathbf{n}$ jest algebrą nilpotentną.