1. Uzasadnij że algebra Liego $\mathbf{g}$ jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy ma nietrywialne centrum $\mathbf{z}$ i $\mathbf{g}/\mathbf{z}$ jest nilpotentna. Sformułuj i udowodnij analogiczny warunek dla grup.

2. Pokaż że spójna grupa Liego jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy jej algebra Liego jest nilpotentana.

3. Pokaż że jeśli algebra Liego $\mathbf{g}$ jest nilpotentna i $\mathbf{g}/[\mathbf{g},\mathbf{g}]$ jest generowane przez $x_1,\ldots,x_n$ to $x_1,\ldots,x_n$ także generują $\mathbf{g}$.

Wskazówka: Indukcyjnie pokaż że $x_1,\ldots,x_n$ generują $\mathbf{g}/\mathbf{g}_i$ dla dowolnego $i \geq 1$.

4. Pokaż że nilpotentna algebra Liego ze skończonym zbiorem generatorów jest skończenie wymiarowa.

5. Pokaż że skończenie wymiarowa algebra Liego A nad ciałem zawiera maksymalny ideał rozwiązalny.

Wskazówka: Uzasadnij że gdy I_1 i I_2 są ideałami rozwiązalnymi w A to $I_1 + I_2$ jest ideałem rozwiązalnym.

6. Uzasadnij że jeśli A jest skończenie wymiarową rozwiązalną algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 to $[A, A]$ jest nilpotentna.

Wskazówka: Najpierw pokaż ten sam wynik dla obrazu A przez ad.

Przypominam że element a pierścienia nazywamy nilpotentnym wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $k \geq 0$ takie że $a^k = 0$.

7. Uzasadnij że jeśli A jest skończenie wymiarową rozwiązalną algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0, D jest różniczkowaniem A to operator $\mathrm{ad}_{D(y)}$ jest nilpotentny dla dowolnego $y \in A$.

Wskazówka: Użyj wynik poprzedniego zadania dla odpowiedniej algebry pomocniczej.

8. Przestrzeń rzutowa $P(K,n)$ nad ciałem K to iloraz $K^{n+1} - 0$ w którym utożsamiamy x z λx dla dowolnego $\lambda \neq 0$. Macierze $n+1$ na $n+1$ nad K w naturalny sposób działają na $P(K,n)$. Wyznacz orbity działania $SL(2,\mathbb{R})$ i macierzy górnotrójkątnych na $P(\mathbb{C},1)$. Pokaż że macierze górnotrójkątne działają tranzytywnie na orbitach $SL(2,\mathbb{R})$ maksymalnego wymiaru.

9. Przestrzenią jednorodną grupy G nazywamy przestrzeń na której G działa tranzytywnie. Przedstaw przestrzenie rzutowe i sfery jako przestrznie jednorodne.