**1**. Pokaż że dla danego $n$ i $k$ istnieje wolna algebra nilpotentna $N_{n,k}$ długości co najwyżej $k$ generowana przez $n$ elementów. Dokładniej, $N_{n,k}$ jest taką algebrą Liego że dla dowolnej nilpotentnej algebry Liego $B$ długości co najwyżej $k$ i odwzorowania $h$ ze zbioru generatorów $\{x_1, \ldots, x_n\}$ w $B$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\tilde{h} : N_{n,k} \mapsto B$ takie że $h(x_i) = \tilde{h}(x_i)$. Dla skończonego $n$ algebra $N_{n,k}$ jest skończenie wymiarowa.

Uwaga: Nilpotentność jest kluczowa żeby dostać skończony wymiar. Mianowicie, algebra $A$ z zadania 8 z listy 2 jest nieskończnie wymiarową rozwiązalną algebrą Liego o dwu generatorach. Przy tym $[A, A]$ jest algebrą przemienną (takie algebry nazywamy metaabelowymi).

**2**. Algebra Liego $\mathbf{sl}(2, \mathbb{R})$ jest generowana przez elementy $H$, $X$, $Y$ takie że $H = [X, Y]$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$. Niech $v_k$, $k = 0, \ldots, m$ będzie bazą przestrzeni $m + 1$ wymiarowej przestrzeni $V_m$ $(m \geq 1)$. Sprawdź że wzory $Hv_k = (2k - m)v_k$, $Xv_k = (m - k)v_{k+1}$, $Yv_k = kv_{k-1}$ zadają na $V_m$ strukturę modułu Liego nad $\mathbf{sl}(2, \mathbb{R})$. Moduł ten jest izomorficzny z naturalnym działaniem $\mathbf{sl}(2, \mathbb{R})$ na wielomianach jednorodnych stopnia $m$. Ponadto moduł ten jest prosty (tzn. nie zawiera niezerowych podmodułów Liego różnych od siebie).

**3**. Pokaż że jeśli $N_1$ i $N_2$ są nilpotentnymi ideałami to również $N_1 + N_2$ jest ideałem nilpotentnym. Wywnioskuj stąd że algebra Liego $A$ skończonej długości (skończnie wymiarowa jeśli pierścień podstawowy to ciało) zawiera maksymalny ideał nilpotentny, tzn. taki ideał nilpotentny $N$ że dowolny ideał nilpotentny $A$ jest zawarty w $N$.

Wskazówka: Jeśli $N$ jest ideałem nilpotentnym w $A$ to $[A, N_k] \subset N_k$, gdzie $N_k$ to ciąg z definicji algebry nilpotentnej.

**4**. Niech ciało $K$ będzie algebraicznym domknięciem ciała $p$-elementowego gdzie $p$ jest liczbą pierwszą. Rozważmy przestrzeń wektorową $V$ nad $K$ wymiaru $p$ z bazą $e_i$, $i = 0, \ldots, p - 1$. Operator $X$ definiujemy wzorem $Xe_i = ie_{i-1}$ (w szczególności $Xe_0 = 0$). Operator $Y$ definiujemy wzorem $Ye_i = e_{i+1}$ dla $i < p - 1$ i $Ye_{p-1} = e_0$. Sprawdź że $X$ i $Y$ generują nilpotentną algebrę $N$ endomorfizmów $V$. Sprawdź że $N$ nie ma wspólnego wektora własnego.

Uwaga: Oznacza to że w twierdzeniu Liego i w lemacie o reprezentacjach algebr nilpotentnych założenie charakterystyki 0 jest istotne.

**5**. Niech $V$ będzie przestrzenią wielomianów nad $\mathbb{R}$ jednej zmiennej $x$. Na $V$ rozpatrujemy operatory $X = \partial_x$ oraz $M_p(q) = pq$ dla $p \in V$. Niech $V_k$ będzie przestrzenią wielomianów stopnia nie przekraczającego $k$. Niech $A$ będzie algebrą Liego generowaną przez $X$ i $V$ zaś $A_k$ algebrą Liego generowaną przez $X$ i $V_k$. Uzasadnij że $A_k$ jest ideałem nilpotentnym w $A$. Uzasadnij że $A$ nie zawiera maksymalnego ideału nilpotentnego.

**6**. Rozważmy przestrzeń $V$ i algebrę $A_1$ w notacj z poprzedniego zadania. $V$ jest modułem Liego nad $A_1$. Uzasadnij że $V$ nie zawiera niezerowych podmodułów Liego różnych od $V$ (czyli $V$ jest modułem prostym). W szczególności elementy $A_1$ nie mają wspólnego wektora własnego.

**7**. Pokaż że jeśli algebra Liego $A$ jest sumą prostą algebr $A_1$ i $A_2$, to algebra obwiednia $U(A)$ jest izomorficzna z iloczynem tensorowym $U(A_1)$ i $U(A_2)$ z działaniem zadanym wzorem $(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = (x_1x_2) \otimes (y_1y_2)$.

**8**. Uzasadnij że jeśli $A$ jest algebrą jednowymiarową (tzn. modułem wolnym nad $R$ z jednym generatorem) to $A$ jest przemienna zaś $U(A)$ jest izomorficzne z pierścieniem wielomianów jednej zmiennej.

**9**. Produkt wolny $R$-algebr Liego $A_1$ i $A_2$ definujemy jako taką $R$-algebrę Liego $B$ z włożeniami $\iota_i : A_i \mapsto B$, $i = 1, 2$ że dla dowolnej $R$-algebry Liego $C$ i dowolnych homomorfizmów $R$-algebr Liego $h_i : A_i \mapsto C$, $i = 1, 2$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $R$-algebr Liego $h : B \mapsto C$, taki że $h_i = h \circ \iota_i$. Uogólnij defincję na dowolną, niekoniecznie skończoną rodzinę algebr. Uzasadnij że produkt wolny istnieje i jest jednoznaczny z dokładnością do izomorfizmu. Ponadto pokaż że produkt wolny odpowiedniej liczby kopii pierścienia $R$ traktowanego jako $R$-algebra Liego z zerowym komutatorem spełnia naturalną definicję wolnej algebry Liego (sformułuj tą definicję).