1. Niech A będzie algebrą Liego która jako moduł nad pierścieniem podstawowym R jest generowana przez elementy $\{e_i\}_{i\in I}$. Zakładamy że na I zadany jest porządek liniowy. Pokaż że elementy postaci

$$\iota(e_{i_1})\iota(e_{i_2})\dots\iota(e_{i_n})$$

gdzie $i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_n$ generują uniwersalną algebrę obwiednią $U(A)$ (ciąg pusty daje jedynkę).

2. Niech G będzie grupą Liego z algebrą Liego L, i niech D będzie algebrą operatorów różniczkowych na G niezmienniczych na przesunięcia z prawej strony (mnożenie to składanie operatorów). Pokaż że algebra obwiednia $U(L)$ jest izomorficzna z D.

Wskazówka: Rozpatrz działanie elementów D na jednomiach w układzie wpółrzędnych.

3. Rozważmy uniwersalną algebrę obwiednią dla algebry Heisenberga i algebry "ax + b" nad ciałem charakterystyki 0. Uzasadnij że centrum uniwersalnej algebry obwiedniej algebry Heisenberga to uniwersalna algebra obwiednia centrum algebry Heisenberga. Uzasadnij że centrum uniwersalnej algebry obwiedniej algebry "ax + b" jest trywialne (tzn. redukuje się do ciała podstawowego).

Wskazówka: Rozważ działanie elementów bazy algebry na elementach bazy uniwersalnej algebry obwiedniej. Przy naturalnym wyborze baz efekt działania będzie wielokrotnością innego elementu bazy algebry obwiedniej.

4. Niech A będzie algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0 generowaną przez elementy S, X i Y, taką że $[X,Y] = 0$, $[S,X] = Y$, $[S,Y] = -X$. Uzasadnij że centrum uniwersalnej algebry obwiedniej $U(A)$ jest generowane przez element $X^2 + Y^2$.

Definicja: Formę dwuliniową B na algebrze Liego A nazywamy niezmienniczą jeśli dla każdych $x, y, z \in A$ zachodzi $B([x,y],z) + B(y,[x,z]) = 0$.

5. Pokaż że jeśli A jest algebrą Liego spójnej grupy Liego G to forma dwuliniowa B na A jest niezmiennicza na A wtedy i tylko wtedy gdy jest niezmniennicza na działanie Ad. Wywnioskuj stąd że jeśli G jest zwarta to na A istnieje dodatnio określony niezmienniczy iloczyn skalarny.

6. Pokaż że jeśli B jest dwuliniową formą niezmienniczą na A, zaś I jest ideałem w A, to zbiór $I^\perp = \{x \in A : \forall_{y\in I} B(x,y) = 0\}$ jest ideałem. Wywnioskuj stąd i z poprzedniego zadania że jeśli podalgebra S algebry Liego zwartej grupy Liego jest rozwiązalna, to S jest przemienna.