Lista 9

Zadania 1 do 8 stanowią cykl ilustrujący użycie algebr Liego do badania grup (głównie nilpotentnych) które nie są grupami Liego.

1. Niech X będzie zbiorem, N będzie przestrznią wektorową nad $\mathbb{Q}$ z bazą X, $T[[N]] = \prod_n N^{\oplus n}$ będzie uzupełnieniem algebry tensorowej, $LV[[N]]$ będzie uzupełnieniem podalgebry Liego $T[[N]]$ generowanej przez N. W $LV[[N]]$ wprowadzamy mnożenie wzorem Campbella-Bakera-Hausdorffa, tzn

$$xy = \log(\exp(x)\exp(y))$$

gdzie po prawej stronie mamy mnożenie w $T[[N]]$. Pokaż że podgrupa G grupy otrzymanej z $LV[[N]]$ z tym działamiem, generowana przez X jest grupą wolną, tzn, dowolne odwzorowanie X w grupę H przedłuża się jednoznacznie do homomorfizmu G w H.

Wskazówka: Pokaż że każdy element G może być jednoznacznie zapisany w postaci $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ gdzie $x_i \in X$, $x_i \neq x_{i+1}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \neq 0$. Dla jednoznaczności rozwiń $\exp(k_i x_i)$ w szereg i zauważ że produkt szeregów nie może być równy 1.

2. Niech L będzie nilpotentną algebrą Liego stopnia nilpotentności l nad pierścieniem R takim że $l!$ jest odwracalne we R. Wtedy szereg Campbella-Bakera-Hausdorffa daje dobrze zdefiniowane mnożenie w L. Pokaż że jeśli I jest ideałem w L to względem tego mnożenia I jest podgrupą normalną. Odwrotnie, jeśli R jest ilorazem $\mathbb{Z}$ to każda podgrupa normalna L jest tej postaci.

Wskazówka: Niech T będzie podgrupą zaś I generowaną przez nią algebrą i niech $I_1 = I$, $I_{K+1} = [I, I_k]$. Indukcyjnie pokaż że $T + I_k$ jest podmodułem nad $\mathbb{Z}$, i że $I = T + I_k$.

Przypominam definicje: Niech G będzie dowolną grupą zaś M i N będą jej podgrupami. Komutator $[M, N]$ definujemy jako podgrupę G generowaną przez elementy postaci $ghg^{-1}h^{-1}$ dla $g \in M$, $h \in G_k$. Zstępujący ciąg centralny G_n definujemy następująco: $G_1 = G$ zaś $G_{k+1} = [G, G_k]$.

3. Sprawdź że jeśli H, M, N są podgrupami normalnymi w G to $[[H, M], N] \subset [[M, N], H][[H, N], M]$

4. Pokaż że G_k jest podgrupą normalną w G i G_k/G_{k+1} leży w centrum G/G_{k+1} (w szczególności G_k/G_{k+1} jest abelowe). Ponadto $[G_k, G_l] \subset G_{k+l}$.

Wskazówka: Ostatni wzór pokazujemy indukcyjnie przy pomocy zadania 3.

5. Niech $W_k = G_k/G_{k+1}$ i $W = \oplus_k W_k$. Zakładamy że G jest grupą nilpotentną. Pokaż że na W można zadać strukturę algebry Liego nad $\mathbb{Z}$ tak że dla $[x] \in W_k$, $[y] \in W_l$ mamy $[[x], [y]] = [xyx^{-1}y^{-1}] \in W_{l+k}$.

6. Niech $H = LV[[N]]$ gdzie jak w zadaniu 1 na $LV[[N]]$ mnożenie wprowadzamy wzorem Campbella-Bakera-Hausdorffa i niech γ_l będzie podzbiorem $LV[[N]]$ składajacym się z szeregów których składowe jednorodne rzędu mniejszego niż k są zerami. Niech H_k oznacza elementy zstępującego ciągu centralnego dla H. Pokaż że $H_k \subset \gamma_k$ i że dla dowolnego $l > k$ zachodzi $(H_k +$

$\gamma_l)/(H_{k+1}+\gamma_l) = LV[N]_k$ gdzie $LV[N]_k$ jest zbiorem elementów $LV[[N]]$ które są tensorami jednorodnymi rzędu k. Ponadto dla grupy G z zadania 1 zachodzi $G_k = G \cap \gamma_k$.

Wskazówka: H/γ_{k+1} jest grupą nilpoteną stopnia nilpotentności k. G_{k+1} leży w jądrze dowolnego homomorfizmu z G w grupę nilpoteną stopnia nilpotentności k.

7. Niech G będzie grupą nilpotentną. Zakładamy dodatkowo że G jest podzielna i beztorsyjna, tzn. dla dowolnego $x \in G$ i całkowtego $n > 0$ istnieje $y \in G$ taki że $y^n = x$. Pokaż że wtedy algebrę Liego W grupy G zdefiniowaną w zadaniu 5 można potraktować jako algebrę Liego nad liczbami wymiernymi zaś G jest izomorficzna z grupą otrzymaną przy pomocy wzoru Campbella-Bakera-Hausdorffa z W. W szczególności takie grupy są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy ich algebry Liego są izomorficzne.

Wskazówka: Niech X będzie bazą W_1 nad $\mathbb{Q}$. Z zadania 1 wywnioskuj że istnieje homomorfizm z podgrupy $LV[[W_1]]$ generowanej przez W_1 na G. Resztę dostań z zadań 6 i 2.

8. Niech G będzie skończoną p-grupą (tzn. G ma p^k elementów dla pownego k) stopnia nilpotentności $l < p$. Zauważ że na algebrze Liego W grupy G wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa zadaje strukturę grupy i że G jest izomorficzna z W.

Wskazówka: Zadanie 6 pokazuje że G jest ilorazem "wolnej"grupy nilpotentnej stopnia nilpotentności l. Tą grupę można traktować jako podgrupę wolnej algebry nilpotenej nad pierścieniem $\mathbb{Z}/(p^k\mathbb{Z})$.

9. Opisz strukturę $S \otimes_R G$ jeśli R to liczby rzeczywiste zaś S to liczby zespolone. W szczególności, co wyjdzie jeśli G to:

- algebra rzeczywistych macierzy 2×2 o śladzie 0
- algebra zespolonych macierzy 2×2 o śladzie 0
- algebra zespolonych macierzy antyhermitowskich 2×2 o śladzie 0

Algebrę Liego nazywamy półprostą jeśli nie zawiera nietrywialnych ideałów rozwiązalnych.

10. Pokaż że suma prosta algebr półprostych jest półprosta.

11. Niech ciało F będzie rozszerzeniem algebraicznym ciała K. Pokaż że algebra Liego A nad ciałem K jest półprosta wtedy i tylko wtedy gdy algebra $A_F = F \otimes_K A$ jest półprosta jako algebra Liego nad F.

Wskazówka: Aby pokazać że A_F jest półprosta wystarczy to zrobić w przypadku gdy rozszerzenie F/K jest skończone. Użyj wtedy poprzedniego zadania.

Nilradykałem $\mathbf{s}$ algebry Liego L nazywamy podzbiór L taki że każdy element $s \in \mathbf{s}$ działa jak zero w każdym L-module prostym tzn.

$$\mathbf{s} = \{s \in L : \forall_V \forall_{v \in V} V \text{ jest prosty } \implies sv = 0\}$$

12. Zakładamy że L jest skończenie wymiarową algebrą nad ciałem. Pokaż że w definicji nilradykału można by rozpatrywać skończenie wymiarowe (niekoniecznie proste) moduły Liego i żądać że $\mathbf{s}$ działa przez operatory nilpotentne. Ponadto

- jeśli algebra L jest półprosta to $\mathbf{s} = \{0\}$,
- $\mathbf{s}$ jest ideałem nilpotentnym,

- jeśli algebra L jest abelowa to $\mathbf{s} = \{0\}$,
- $\mathbf{s} \subset [L, L]$,
- jeśli L jest rozwiązalna nad ciałem charakterystyki 0 to $\mathbf{s} = [L, L]$.

13. Rozważamy skończenie wymiarowe algebry Liego nad ciałem charakterystyki 0. Pokaż że jeśli $N \subset A \subset L$, N jest podalgebrą Cartana w L, A jest podalgebrą L, to N jest podalgebrą Cartana w A.

14. Algebra Liego L (nad ciałem liczb rzeczywistych) ma bazę X, Y, Z, T, S z relacjami $[X, Y] = Z$, $[X, T] = T$, $[Y, S] = S$ (pozostałe komutatory elementów bazy to 0). Pokaż jeśli a, b są dowolnymi ustalonymi liczbami to podalgebra generowana przez elementy postaci $X + aT, Y + bS, Z$ jest podalgebrą Cartana w L. Ponadto każda podalgebra Cartana L jest takiej postaci.

15. Niech L będzie skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem dowolnej charakterystyki i C będzie podalgebrą Cartana w L. Pokaż że $L = C + [L, L]$.

16. Niech L będzie rozwiązalną algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 i niech N będzie podalgebrą Cartana w L. Wiemy że

$$L = N \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} L_\lambda = N \oplus V$$

gdzie λ są funkcjonałami pierwiastkowymi zaś L_λ odpowiednimi podprzestrzeniami pierwiastkowymi. Każde λ rozszerzamy z N na L kładąc $\lambda(x) = 0$ dla $x \in V$. Pokaż że to poprawnie definiuje λ na L i że tak rozszerzone λ nie zależą od wyboru N.

17. Pokaż że jeśli D jest różniczkowaniem skończenie wymiarowej rozwiązalnej algebry Liego L nad ciałem charakterystyki 0 to dla dowolnego $x \in L$ operator ad_{Dx} jest nilpotentny. Wywnioskuj stąd że funkcjonały pierwiastkowe λ z poprzedniego zadania spełniają $\lambda(Dx) = 0$. Ponadto, jeśli G spójną grupą automorfizmów L, to λ są niezmiennicze na działanie G.

Wskazówka: Algebra różniczkowań generowana przez D i L jest rozwiązalna.

18. Niech A będzie algebrą Liego zwartej grupy Liego G. Uzasadnij że podalgebra Cartana w A jest przemienna. Ponadto A jest sumą prostą algebr prostych i algebry przemiennej.

Wskazówka: Użyj wyniki zadań 5 i 6 z listy 8.

19. Niech A będzie algebrą Liego zaś R będzie maksymalnym ideałem rozwiązalnym w R uzasadnij że A/R jest algebrą półprostą.

20. Uzasadnij że algebra $\mathbf{sl}(2, \mathbb{C})$ potraktowana jako algebra Liego nad $\mathbb{R}$ jest algebrą prostą. Co otrzymamy po rozszerzeniu skalarów z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$?

Wskazówka: Pokazując prostotę mnożenie przez jednostkę urojoną i można zapisać jako superpozycję ad dla odpowiednich elementów naszej algebry.