Grupy i algebry Liego

W. Hebisch

28 lutego 2023

Definicja: Grupa Liego to grupa ze strukturą rozmaitości różniczkowej taka że operacje grupowe są gładkie (C^∞).

Przykłady:

0. Prosta rzeczywista czy ogólniej $\mathbb{R}^n$ z dodawaniem.
1. Grupa Heisenberga, tzn. $\mathbb{R}^3$ z mnożeniem zadanym wzorem

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)).$$

Ta grupa jest izomorficzna z grupą macierzy postaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathbb{R}^2$ z mnożeniem zadanym wzorem

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \exp(x_2)y_1 + y_2).$$

Ta grupa jest izomorficzna z grupą przekształceń afinicznych prostej zachowujących orientację.

3. Grupa izometrii płaszczyzny (czy ogólniej $\mathbb{R}^n$).
4. Grupa przekształceń ortogonalnych $\mathbb{R}^3$.
5. Grupa $SL(2, \mathbb{R})$ macierzy rzeczywistych 2 na 2 o wyznaczniku 1.

Pole wektorowe na rozmaitości różniczkowej M to odwzorowanie X z M w TM takie że $\pi(X)$ gdzie π jest naturalnym rzutowaniem z TM na M jest identycznością. Innymi słowy $X(x) \in TM_x$.

Gładkie pole wektorowe X na rozmaitości różniczkowej M można utożsamiać z operatorem różniczkowym $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ który jest różniczkowaniem, tzn. spełnia wzór Leibnitza $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$.

Lewe (prawe) przesunięcie L_g (R_gr) funkcji na grupie Liego G definiujemy wzorem

$$(L_g f)(x) = f(g^{-1}x),$$

$$(R_g f)(x) = f(xg).$$

Można sprawdzić że $L_{g_1}(L_{g_2} f) = L_{g_1 g_2} f$ i $R_{g_1}(R_{g_2} f) = R_{g_1 g_2} f$.

Mówimy że pole wektorowe X jest niezmiennicze na lewe przesunięcia jesli

$$X(L_g f) = L_g(XF)$$

Odpowiednio X jest niezmiennicze na prawe przesunięcia jeśli

$$X(R_g f) = R_g(XF).$$

Definicja. Algebra Liego $\mathbf{g}$ grupy Liego G to zbiór prawostronnie niezmienniczych pól wektorowych na G. Algebra Liego $\mathbf{g}$ ma strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$, mianowicie dodawanie pól wektorowych i mnożenie przez liczbę zachowuje pola prawostronnie niezmiennicze.

Prawostronnie niezmiennicze pole wektorowe jest jednoznacznie wyznaczone przez swoją wartość w jednym punkcie, np. jedynce e. A więc algebra Liego $\mathbf{g}$ grupy Liego G jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową. Na algebrze Liego grupy Liego G wprowadzamy dodatkową operacje, tzn. nawias Liego wzorem

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Widać że jest to pole prawostronnie niezmiennicze, czyli nawias Liego jest dobrze zdefiniowany.

Nawias Liego jest $\mathbb{R}$-liniowy, antysymetryczny

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

i spełnia tożsamość Jacobiego

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

Ogólniej jeśli R jest pierścieniem przemiennym, A jest modułem nad R zaopatrzonym w R-liniową operację $[\cdot, \cdot] : A \times A \to A$ (nawias Liego) to mówimy że A jest algebrą Liego nad R jeśli $[x, x] = 0$ (to jest dobra definicja antysymetrii w ogólnym przypadku) i nawias Liego spełnia tożsamość Jacobiego.

Homomorfizm algebr Liego nad R definiujemy jako odworowanie h które jest R-liniowe i przeprowadza nawias Liego na nawias Liego

$$h([x, y]) = [h(x), h(y)].$$

Lemat 0.1 *Jeśli h jest gładkim homomorfizmen grupy Liego G w grupę Liego H, to pochodna h w jedynce grupy G daje homomorfizm algebr Liego.*

Uwaga: Tu korzystamy z tego wektor styczny w jedynce jednoznacznie wyznacza prawostronnie niezmiennicze pole wektorowe.

Dowód: Oczywiście pochodna daje odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe. A więc wystarczy pokazać że pochodna przeprowadza nawias Liego na nawias Liego. Niech X, Y będą prawostronnie niezmienniczymi polami wekorowymi na G zaś $\tilde{X}, \tilde{Y}$ ich obrazmi przez pochodną h. Jako że h jest homomorfizmem, to X jest h-związane z $\tilde{X}$, tzn.

$$\tilde{X}(h(g)) = (Dh)_g X(g)$$

gdzie $(Dh)_g$ oznacza pochodną h w g. Podobnie Y i $\tilde{Y}$ są h-związane. Niech $f \in C^\infty(H)$ będzie dowolne. Jako że pola są h-związane to mamy

$$X(f \circ h) = (\tilde{X} f) \circ h$$

i podobnie dla Y. Teraz

$$[X, Y](f \circ h) = (XY - YX)(f \circ h)$$

$$= ((\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X})f) \circ h = ([\tilde{X}, \tilde{Y}]f) \circ h$$

co oznacza że wartość $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ w jedynce H jest obrazem $[X, Y]$ przez pochodną h. $\square$

Algebrę Liego $\mathbf{g}$ grupy Liego G możemy wyznaczać wyznaczając najpierw prawostronnie niezmiennicze pole wektorowe na G wzorem:

$$(Xf)(g) = \partial_t f(\gamma(t)g)|_{t=0}$$

gdzie γ jest dowolnie wybraną krzywą gładką z wektorem stycznym dla $t = 0$ równym $X(e)$. Wzór ten można uzasadnić następująco: jasne jest że wzór da prawostronnie niezmiennicze pole wektorowe. Dobierając γ możemy dostać dowolne $X(e)$, czyli w ten sposób dostaniemy wszystkie prawostronnie niezmiennicze pole wektorowe na G.

W praktyce możemy się ograniczyć do krzywych takich że ich wektory styczne dają bazę przestrzeni stycznej w e.

Przykład. Dla grupy Heisenberga możemy użyć krzywych $\gamma_X(t) = (t, 0, 0)$, $\gamma_Y(t) = (0, t, 0)$, $\gamma_Z(t) = (0, 0, t)$. Mamy

$$(Xf)((x, y, z)) = \partial_t f((t, 0, 0)(x, y, z))|_{t=0}$$

$$= \partial_t f(t + x, y, z + \frac{1}{2}ty)|_{t=0} = (\partial_x f + \frac{1}{2}y\partial_z f)((x, y, z))$$

czyli

$$X = \partial_x + \frac{1}{2}y\partial_z.$$

Podobnie

$$Y = \partial_y - \frac{1}{2}x\partial_z,$$

$$Z = \partial_z$$

Współczynniki X i Y nie zależą od z, czyli

$$[X, Z] = [Y, Z] = 0.$$

Naiwnie nawias Liego $[X, Y]$ można policzyć następująco. Mamy

$$([X, Y]f = (XY - YX)f = (\partial_x + \frac{1}{2}y\partial_z)(\partial_y - \frac{1}{2}x\partial_z)f - (\partial_y - \frac{1}{2}x\partial_z)(\partial_x + \frac{1}{2}y\partial_z)f$$

$$= (\partial_x\partial_y - \frac{1}{2}\partial_x x\partial_z + \frac{1}{2}y\partial_z\partial_y - \frac{1}{4}y\partial_z x\partial_z)f$$

$$-(\partial_y\partial_x + \partial_y\frac{1}{2}y\partial_z - \frac{1}{2}x\partial_z\partial_x - \frac{1}{4}x\partial_z y\partial_z)f.$$

Teraz korzystamy z przemienności pochodnych cząstkowych: $\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$. Dalej, używając wzór Leibnitza

$$x\partial_z y\partial_z f = xy\partial_z^2 f,$$

$$y\partial_z x\partial_z f = xy\partial_z^2 f,$$

$$\partial_x x\partial_z f = x\partial_x\partial_z f + (\partial_x x)\partial_z f = x\partial_x\partial_z f + \partial_z f,$$

$$\partial_y y \partial_z f = y \partial_y \partial_z f + \partial_z f.$$

Wstawiając to do wzoru wyżej dającego $[X, Y]$ mamy

$$[X, Y] = (\partial_x \partial_y - \frac{1}{2} x \partial_x \partial_z - \frac{1}{2} \partial_z + \frac{1}{2} y \partial_y \partial_z - \frac{1}{4} xy \partial_z^2)$$

$$-(\partial_x \partial_y + \frac{1}{2} y \partial_y \partial_z + \frac{1}{2} \partial_z - \frac{1}{2} x \partial_z \partial_x - \frac{1}{4} xy \partial_z^2).$$

Teraz większość wyrazów się kasuje co daje nam

$$[X, Y] = -\partial_z = -Z.$$

Nieco sprytniej można skorzystać z własności komutora pól wektorowych:

$$[X, Y] = [\partial_x + \frac{1}{2} y \partial_z, \partial_y - \frac{1}{2} x \partial_z] = [\partial_x, \partial_y] + \frac{1}{2}[y\partial_z, \partial_y] - \frac{1}{2}[\partial_x, x\partial_z] - \frac{1}{4}[y\partial_z, x\partial_z].$$

Jak wyżej

$$\partial_x x \partial_z = x \partial_x \partial_z + \partial_z = x \partial_z \partial_x + \partial_z$$

czyli

$$[\partial_x, x\partial_z] = \partial_z.$$

Podobnie

$$[y\partial_z, \partial_y] = -[\partial_y, y\partial_z] = -\partial_z,$$

$$[\partial_x, \partial_y] = 0,$$

$$[y\partial_z, x\partial_z] = 0.$$

Czyli

$$[X, Y] = \frac{1}{2}([y\partial_z, \partial_y] - [\partial_x, x\partial_z]) = \frac{1}{2}(-\partial_z - \partial_z) = -\partial_z.$$