1 Wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa

W poprzednie notatki zakończyliśmy następującym lematem:

Lemat 1.1 *Niech x i y będą szeregami Liego i niech*

$$z = \log(\exp(x)\exp(y)).$$

Wtedy z jest szeregiem Liego.

Chcielibyśmy podać jawne przedstawienie szeregu z przy pomocy komutatorów. Najpierw wprowadzamy uproszczoną notację, mianowicie rekursywnie definujemy

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [x_1, [x_2, \ldots, x_k]].$$

Na $T(M)$ definiujemy odwzorowanie π wzorem

$$\pi(x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_k) = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$$

dla $x_i \in M$.

Lemat 1.2 *π ograniczone do wolnej algebry Liego F jest różniczkowaniem. Jeśli $x \in F$ jest element jednorodnym rzędu k to $\pi(x) = kx$.*

Dowód. Rozpatrujemy działanie dołączone F na sobie i rozszerzemy je do działania $U(F) = T(M)$ na F. To działanie będziemy oznaczać przez $*$, tzn. $a * b$ oznacza działnie elementu $a \in T(M)$ na $b \in F$. Jeśli $a \in F$ to mamy $a * b = \mathrm{ad}_a(b) = [a, b]$. Jeśli $a = a_1 a_2 \ldots a_k$, $a_i \in F$ to

$$a * b = \mathrm{ad}_{a_1}\mathrm{ad}_{a_2} \ldots \mathrm{ad}_{a_k}(b).$$

Jeśli $a, b \in T(M)$ to zapisując każde jako kombinację liniową produktów elementów M mamy $\pi(ab) = a * \pi(b)$, a więc dla $a, b \in F$ mamy

$$\pi([a, b]) = \pi(ab) - \pi(ba) = a * \pi(b) - b * \pi(a)$$

$$= [a, \pi(b)] - [b, \pi(a)] = [a, \pi(b)] + [\pi(a), b].$$

a więc faktycznie π ograniczone do F jest różniczkowaniem.

Jeśli $x \in M$ to $\pi(x) = x$. Ale na $T(M)$ możemy zdefiniować różniczkowanie δ wzorem $\delta(x) = kx$ dla x będących elementami jednorodnymi rzędu k. To różniczkowanie po obcięciu do F da nam różniczkowanie F. Ponieważ π i δ są dwoma różniczkowaniami F które zgadzają się na generatorach F to zgadzają się na całym F. □

Lemat 1.3 *(Wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa) Niech x i y będą szeregami Liego i niech*

$$z = \log(\exp(x)\exp(y)).$$

Wtedy

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{l_i+m_i \geq 1, i=1,\ldots k} \frac{[x^{l_1}y^{m_1} \ldots x^{l_k}y^{m_k}]}{(l_1 + m_1 + \cdots + l_k + m_k) l_1! m_1! \ldots l_k! m_k!}$$

gdzie dla $m_k > 0$

$$[x^{l_1}y^{m_1}\dots x^{l_k}y^{m_k}] = \mathrm{ad}_x^{l_1}\mathrm{ad}_y^{m_1}\dots \mathrm{ad}_x^{l_k}\mathrm{ad}_y^{m_k-1}(y)$$

zaś dla $m_k = 0$ *(wtedy* $l_k > 0$*)*

$$[x^{l_1}y^{m_1}\dots x^{l_k}y^{m_k}] = \mathrm{ad}_x^{l_1}\mathrm{ad}_y^{m_1}\dots \mathrm{ad}_x^{l_k-1}(x).$$

Dowód. Wynik wystarczy pokazać gdy x i y są obrazami elementów X, tzn. są elementami jednorodnymi rzędu 1 (ogólny przypadek otrzymamy jako homomorficzny obraz powyższego). Mamy

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^l y^m}{l!m!} = 1 + \sum_{l+k\geq 1}\frac{x^l y^m}{l!m!},$$

$$(\exp(x)\exp(y) - 1)^k = \sum_{l_1+m_1\geq 1}\dots\sum_{l_k+m_k\geq 1}\frac{x^{l_1}y^{m_1}\dots x^{l_k}y^{m_k}}{l_1!m_1!\dots l_k!m_k!}$$

$$= \sum_{l_i+m_i\geq 1, i=1,\dots k}\frac{x^{l_1}y^{m_1}\dots x^{l_k}y^{m_k}}{l_1!m_1!\dots l_k!m_k!}$$

$$z = \log(\exp(x)\exp(y)) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(\exp(x)\exp(y)-1)^k}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sum_{l_i+m_i\geq 1, i=1,\dots k}\frac{x^{l_1}y^{m_1}\dots x^{l_k}y^{m_k}}{l_1!m_1!\dots l_k!m_k!}.$$

Produkt $x^{l_1}y^{m_1}\dots x^{l_k}y^{m_k}$ jest rzędu $l_1 + m_1 + \dots l_k + m_k$, czyli stosując do powyższego Lemat 1.2 otrzymamy

$$z = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sum_{l_i+m_i\geq 1, i=1,\dots k}\frac{\pi(x^{l_1}y^{m_1}\dots x^{l_k}y^{m_k})}{(l_1+m_1+\dots+l_k+m_k)l_1!m_1!\dots l_k!m_k!}$$

gdzie π było zdefiniowane przed Lematem 1.2. W sformułowaniu obecnego lematu zapiujemy π w terminach ad_x i ad_y. □

Wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa zawiera wiele wyrazów które są zerowe, ponadto wyrazy są liniowo zależne. Po uproszczeniach wyrazy do rzędu 3 to:

$$x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}([x, [x, y]] + [y, [y, x]]).$$

Otrzymany szereg jest czysto formalny, ale w niektórych ważnych przypadkach jest zbieżny. Zauważmy że na poziomie szeregów formalnych biorąc exp otrzymaliśmy grupę: mnożenie szeregów jest łączne zaś $\exp(-x)$ daje odwrotność $\exp(x)$. A więc używajac wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa otrzymamy strukturę grupy na zbiorze szeregów Liego.

Lemat 1.4 *Jeśli algebra Liego* N *jest nilpotentna stopnia* j *to szereg powyżej redukuje się do skończonej sumy i zadaje na* N *strukturę grupy. Jeśli dodatkowo* N *jest skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem liczb rzeczywistych, to otrzymana grupa jest grupą Liego,* N *jest izomorficzna z jej algebrą Liego zaś odwzorowanie eksponencjalne jest tożsamością.*

Dowód. Zauważmy że jeśli $l_1 + m_1 + \dots l_k + m_k > j$ to

$$[x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}] = 0$$

czyli uwzględniając że $l_i + m_i \geq 1$ czyli $k \leq j$ to mamy tylko skończenie wiele niezerowych wyrazów. Na poziomie szeregów Liego mamy strukturę grupy, sumowanie daje homomorfizm, więc na N dostaniemy strukturę grupy. Jeśli N jest skończenie wymiarową algebrą na liczbami rzeczywistymi to skończona suma niezerowych wyrazów szeregu daje wielomian, czyli funkcję gładką. Odwrotność $x \in N$ to po prostu $-x$, czyli operacje grupowe są gładkie, czyli N z takim działaniem jest grupą Liego. Następnie, dla $x \in N$ odwzorowanie $t \mapsto tx$ daje podgrupę jednoparametrową z wektorem stycznym x, czyli odwzorowanie eksponencjalne jest identycznością N. Następnie

$$(tx) \cdot (sy) = tx + sy + \frac{1}{2} ts[x, y] + r$$

gdzie r zawiera tylko człony wyższego rzędu w t lub s. Czyli

$$\begin{aligned} (tx) \cdot (sy) \cdot (tx)^{-1} = (tx) \cdot (sy) \cdot (-tx) &= sy + \frac{1}{2} ts[x, y] + \frac{1}{2} ts[y, -x] + r \\ &= sy + [x, y] + r \end{aligned}$$

gdzie r zmienia się od lini do lini, ale zawiera tylko człony wyższego rzędu. Teraz

$$\mathrm{Ad}_{tx}(y) = \partial_s (tx) \cdot (sy) \cdot (tx)^{-1} = y + t[x, y] + O(t^2),$$

$$\mathrm{ad}_x(y) = \partial_t \mathrm{Ad}_{tx}(y) = [x, y],$$

czyli nawias Liego naszej struktury grupowej zgadza się z oryginalnym nawiasem Liego. □

Lemat 1.5 *Jeśli algebra Liego A jest przestrzenią Banach i istnieje stała M taka że dla każdych $x, y \in A$ zachodzi nierówność $\|[x, y]\| \leq M \|x\| \|y\|$, to istnieje $r > 0$ takie że szereg Campbella-Bakera-Hausdorffa jest zbieżny dla $\|x\| + \|y\| < r$. Ponadto otrzymane działanie jest łączne o ile pośrednie wyniki są w podanym obszarze.*

Dowód. Niech $s = \max(1, M)$. Wtedy

$$\|[x_1, x_2, \dots, x_k]\| \leq s^k \|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_k\|$$

czyli

$$\|[x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}]\| \leq (s\|x\|)^{l_1 + \dots + l_k} (s\|y\|)^{m_1 + \dots + m_k}$$

co oznacza że

$$\Big\| \sum_{l_i + m_i \geq 1, i=1,\dots k} \frac{[x^{l_1} y^{m_1} \dots x^{l_k} y^{m_k}]}{(l_1 + m_1 + \dots + l_k + m_k) l_1! m_1! \dots l_k! m_k!} \Big\|$$

$$\leq \sum_{l_i + m_i \geq 1, i=1,\dots k} \frac{(s\|x\|)^{l_1 + \dots + l_k} (s\|y\|)^{m_1 + \dots + m_k}}{l_1! m_1! \dots l_k! m_k!} = (\exp(s\|x\|) \exp(s\|y\|) - 1)^k$$

$$(\exp(s(\|x\| + \|y\|)) - 1)^k.$$

Teraz wybieramy r tak by $\exp(sr) - 1 \leq 1$. Wtedy widać że szereg jest bezwzględnie zbieżny. Gdy pośrednie wyniki też spełniają powyższy warunek to łączność wynika z łączności dla szeregu formalnego. □

Powyższy lemat oznacza istnienie tak zwanej grupy lokalnej, dla której można zdefiniować niezmiennicze pola wektorowe i algebrę Liego tak jak w przypadku grupy Liego. Podobnie jak to zrobiliśmy dla algebr nilpotentnych można pokazać że nawias Liego grupy lokalnej zgadza się z oryginalnym nawiasem Liego.

Lemat 1.6 *Jeśli G jest grupą Liego, to na G można wprowadzić strukturę rzeczywistą analityczną. W tej strukturze odwzorowanie eksponencjalne jest rzeczywiste analityczne.*

Dowód. Algebra Liego $\mathbf{g}$ grupy G jest skończenie wymiarowa a więc można na niej wprowadzić normę i stosuje się poprzedni lemat. A więc istnieje lokalna grupa Liego L z algebrą Liego G i taka że operacje w L są rzeczywiste analityczne. Rozważamy teraz produkt $G \times L$ i diagonalną podalgebrę, tzn. podalgebrą składającą się z elementów postaci (X, X). Podobnie jak w dowodzie lematu o istenieniu podgrupy z zadaną podalgebrą twierdzenie Frobeniusa implikuje istnienie podgrupy lokalnej w $G \times L$ odpowadającej podalgebrze diagonalnej. Ta podgrupa daje nam dyfeomorfizm lokalanej podgrupy w L z lokalną podgrupą w G. Jako że działanie w L jest rzeczywiste analityczne daje to nam mapę otoczenia jedynki U w G taką że w tym otoczeniu działanie jest rzeczywiste analityczne. Biorąc otoczenie V takie że $V^{-1} = V$ i $VV \subset U$ możemy przy pomocy przesunięć V zbudować atlas rzeczywisty analityczny dla G. □