Grupy i algebry Liego, wykład 11

W. Hebisch

23 maja 2023

1 Konstrukcje uniwersalne 3

1.1 Rozszerzanie skalarów

Istotną konstrukcją jest rozszerzanie skalarów. Mianowicie dla pierścienia S "rozszerzającego" R i algebry Liego A nad R piszemy

$$A_S = S \otimes_R A$$

A_S ma strukturę S modułu, więc jest algebrą Liego nad S.

Uwaga: słowo "rozszerzającego" napisaliśmy w cudzysłowach, bo konstrukcja wymaga tylko by mieć homomorfizm z R w S, wtedy S jest R modułem i produkt tensorowy da nam R-moduł. Homomorfizm jest potrzebny by mnożenie przez elemeny S zgadzało się z mnożenim przez elementy R. Ważnym przykładem jest $S = \mathbb{Z}_p$ (ciało reszt modulo p) i $R = \mathbb{Z}$. Ogólniej, dla każdego pierścienia (z jedynką) S mamy naturalny homomorfizm z $\mathbb{Z}$ w S, co pozwala budować algebry nad dowolnymi pierścieniami z algebr nad $\mathbb{Z}$.

Jeśli A i B są algebrami Liego nad R, zaś $h : A \to B$ jest homomorfizmem, to $h_S = \mathrm{id}_S \otimes_R h$ jest homomorfizmem algebr Liego. Przy tym $(g \circ h)_S = g_S \circ h_S$.

Zauważmy że algebrę A_S można też traktować jako algebrę Liego nad R. Jeśli R wkłada się różnowartościowo w S, to elementy postaci $1 \otimes a$ dla $a \in A$ tworzą podalgebrę nad R izomorficzną z A.

Lemat 1.1 *Jeśli I jest podalgebrą w A to I_S jest (można traktować jako) podalgebrą w A_S. Jeśli I jest ideałem to I_S jest ideałem w A_S.*

2 Struktura algebr

Lemat 2.1 *Zakładamy że R wkłada się różnowartościowo w S. Algebra A jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy gdy algebra A_S jest rozwiązalna. Podobnie, A jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy A_S jest nilpotentna.*

Dowód: Gdy

$$A_0 = A,$$

$$A_{i+1} = [A_i, A_i]$$

jest ciągiem podalgebr z definicji rozwiązalności, to

$$(A_S)_i = (A_i)_S$$

czyli $A_k = \{0\}$ implikuje $(A_S)_k = 0$. Jeśli R wkłada się różnowartościowo w S to A_k jest podalgebrą $(A_S)_k$ traktowanego jako algebra nad R, czyli $(A_S)_k = \{0\}$ implikuje $A_k = \{0\}$. Identyczny argument działa w przypadku nilpotentności. $\square$

Lemat 2.2 *Jeśli A jest skończnie wymiarową rozwiązalną algebrą Liego nad ciałem R charakterystyki 0, to $[A, A]$ jest algebrą nilpotentną. Jeśli M jest modułem Liego nad A który jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad R to $[A, A]$ działa przez operatory nilpotentne. Jeśli dodatkowo M jest modułem prostym, to A działa na M przez wzajemnie komutujące operatory.*

Dowód. Niech S będzie algebraicznym domknięciem R. A_S jest skończnie wymiarową rozwiązalną algebrą Liego and S. Wiemy że w takim wypadku $[A, A]_S = [A_S, A_S]$ jest algebrą nilpotentną (to jest wynik zadnia 6 z listy 6). Ale to oznacza że również $[A, A]$ jest nilpotentna. Podobnie pokazujemy że $[A, A]$ działa na M przez operatory nilpotentne.

Jeśli M jest modułem prostym to rozpatrujemy podzbiór M składający się z v takich że dla każdego $n \in [A, A]$ mamy $nv = 0$. Jest on niepusty na mocy twierdzenia Engela. Jest on niezmienniczy na działanie A, bo

$$n(av) = [n, a]v + a(nv) = 0$$

gdzie skorzystaliśmy z tego że $[n, a] \in [A, A]$. Oczywiście zbiór wyżej jest przestrznią wektorową nad R, wiec jest też podmodułem Liego w M. Skoro M jest prosty oznacza to że $[A, A]M = 0$, czyli że A działa przez wzajemnie komutujące operatory. $\square$

Przypominam że na wykładzie 7 zdefiniowaliśmy przestrzenie pierwiastkowe dla działania algebry nilpotentnej na przestrzeni V. Dziś będziemy potrzebować wariant tego dla działania ad gdy N jest nilpotentną podalgebrą A.

Lemat 2.3 *Niech A będzie algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0, zaś N nilpotentną podalgebrą A. Piszemy*

$$A_\lambda = \{a \in A : \forall_{n \in N} \exists_k (\mathrm{ad}_n - \lambda)^k(a) = 0\}$$

dla $\lambda \in N^*$ (przestrzeni dualnej do N). Wtedy

$$A = \oplus_\lambda A_k.$$

Ponadto $N \subset A_0$, $[A_\alpha, A_\beta] \subset A_{\alpha+\beta}$.

Dowód: Sam rozkład to wynik w wykładu 7. To że $N \subset A_0$ wynika bezpośrednio z definicji nilpotentności N. A więc pozostaje pokazać że jeśli $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $n \in N$ to $(\mathrm{ad}_n - \alpha - \beta)^m([a, b]) = 0$ dla $m = 2\dim(A)$. Jednakże mamy wariant wzoru Leibnitza:

$$(\mathrm{ad}_n - \alpha - \beta)^m([a, b]) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} [(\mathrm{ad}_n - \alpha)^k(a), (\mathrm{ad}_n - \beta)^{m-k}(b)].$$

Ten wariant łatwo pokazać przez indukcję i z niego wynika równość wyżej: co najmniej jedna z liczb k i $m-k$ jest większa lub równa $\dim(A)$, co oznacza że jeden z argumentów komutatora znika, czyli cała suma znika. $\square$

Definicja. Powiemy że podalgebra $C \subset A$ jest podalgebrą Cartana wtedy i tylko wtedy gdy C jest nilpotentna i istnieje element w $T \in C$ taki że ad_T daje na A/C operator odwracalny.

Lemat 2.4 *Jeśli A jest skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem R charakterystyki 0 to A zawiera podalgebrę Cartana. Ponadto jesli S jest algebraicznym rozszerzeniem R to C jest podalgebrą Cartana w A wtedy i tylko wtedy gdy C_S jest podalgebrą Cartana w A_S.*

Dowód Najpierw udowodnimy drugą część. Zauważmy że C jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy gdy C_S jest nilpotentna. Jeśli operator liniowy $\mathrm{ad}(T)$ na A/C ma odwrotność U, to U_S daje odwrotność $\mathrm{ad}(T_S)$. Jeśli $\mathrm{ad}(T)$ jest odwracalny, to jego wyznacznik jest niezerowy. Jeśli wyznacznik znika na C, to znika też na C_S, więc istnienie $T \in C_S$ z $\mathrm{ad}(T)$ odwracalnym na A_S/C_S implikuje istnienie takiego $T \in C$. Konsekwentnie, C jest podalgebrą Cartana wtedy i tylko wtedy gdy C_S jest podalgebrą Cartana.

By pokazać istnienie algebr Cartana dla $T \in A$ rozpatrujemy przestrzeń

$$T_0 = \{a \in A : \exists_k \mathrm{ad}_T(x)^k = 0\}.$$

W notacji używanej wcześniej byłoby to A_0, ale w przypadku T_0 interesuje nas zależność od T i dlatego tak piszemy a nie A_0. Dla konsekwencji niżej będziemy też pisać T_λ.

Wybieramy T tak by wymiar T_0 był minimalny. Twierdzimy że T_0 jest podalgebrą Cartana w A. Na mocy już udowodnionej części wystarczy pokazać że $(T_0)_S$ jest podalgebrą Cartana w A_S gdzie S jest algebraicznym domknięciem R. Zauważmy najpierw że wymiar T_0 to wymiar jądra ad_T^n gdzie n jest wymiarem A jako przestrzni wektorowej nad R. Operator na jądro wymiaru l jeśli minory (wyznaczniki podmacierzy) rzędu $n-i$ są zerowe dla $i = 0, \ldots, l$, zaś pewien minor rzędu $n-l-1$ jest niezerowy. Ten warunek nie zależy do ciała. Ponadto minory są wielomianami od T. Ciało R jest nieskończone, więc wielomian jest zerem na A wtedy i tylko wtedy gdy jest zerem na A_S. A więc jeśli minimalny wymiar jądra dla A_S wynosi l, to również minimalny wymiar jądra dla A wynosi l. To oznacza że wystarczy pokazać że T_0 jest podalgebrą Cartana dla ciała algebraicznie domkniętego. Dla ciała algebraicznie domkniętego stosuje się Lemat 2.3 (jednowymiarowa algebra rozpinana przez T jest nilpotentną podalgebrą A), czyli

$$A = (T_0) \oplus V$$

gdzie

$$V = \oplus_{\lambda \neq 0} T_\lambda.$$

Na mocy Lematu 2.3 T_0 jest podalgebrą, ponadto $[T_0, T_\lambda] \subset T_\lambda$ i konsekwentnie $[T_0, V] \subset V$. Dla elementu $U \in T_0$ niech $w(U)$ oznacza wyznacznik $\mathrm{ad}(U)$ obciętego do V. Zauważmy że $T \in T_0$ i $w(T) \neq 0$. A więc w nie znika tożsamościowo. Jesli $w(U) \neq 0$ to U jest odwracalny na V, czyli $U_0 \subset T_0$. Jednakże wymiar T_0 jest minimalny możliwy, więc dla takich U mamy $U_0 = T_0$.

Niech teraz $v(U)$ będzie dowolnym elementem macierzy dającej $\mathrm{ad}(U)^n$ obcięty do T_0. Pokazaliśmy że $w(U) \neq 0$ implikuje $v(U) = 0$, czyli $wv = 0$. Jednakże pierścień wielomianów nie ma dzielników zera i $w \neq 0$, czyli $v = 0$. Skoro v był dowolnym elementem macierzy $\mathrm{ad}(U)^n$ obciętego do T_0, to $\mathrm{ad}(U)^n = 0$ na T_0 czyli $T_0 \subset U_0$. Oznacza to że algebra T_0 jest nilpotentna. $T \in T_0$ i T jest odwracalny na $V \approx A/T_0$, a więc drugi warunek defincji podalgebry Cartana jest spełniony. $\square$

Lemat 2.5 *Jeśli C jest podalgebrą Cartana skończenie wymiarowej algebry Liego A nad ciałem algebraicznie domkngtym charakterystyki 0, to biorąc w Lemacie 2.3 $N = C$ mamy $A_0 = C$. Odwrotnie, N jest podalgebrą Cartana wtedy i tylko wtedy gdy $N = A_0$.*

Dowód: Zauważmy że Lematu 2.3 mamy $A = A_0 \oplus V$, czyli $A/C \approx (A_0/C) \oplus V$. Każdy $T \in C$ spełnia $\mathrm{ad}_T^k(A_0) = 0$, czyli ad_T może być odwracalny na A_0/C tylko wtedy gdy ten iloraz jest trywialny, tzn. $A_0 = C$.

Jeśli N spełnia $N = A_0$ to $A/N \approx V$ gdzie $V = \oplus_{\lambda \neq 0} A_\lambda$. Jeśli dla $T \in N$ mamy $\lambda(T) \neq 0$ to ad_T jest odwracalny na A_λ, czyli wyznacznik $w_\lambda(T)$ operatora ad_T obciętego do A_λ nie jest zerowy. Wyznacznik w operatora ad_T obciętego do V jest produktem wyznaczników w_λ, więc jest niezerowym wielomianem. A więc istnieje $T \in N$ taki że $w(T) \neq 0$. Ale to oznacza że ad_T jest odwracalny na V, czyli również na A/N, czyli N jest podalgebrą Cartana. $\square$

Uwaga: Z powyższych argumentów widać że każda podalgebra Cartana skończenie wymiarowej algebry Liego nad ciałem charakterystyki 0 jest takiej postaci jak w dowodzie twierdzenia o istnieniu, tzn. istnieje $T \in C$ taki że

$$C = \{a \in A : \exists_k \mathrm{ad}_t^k(a) = 0\}.$$

W naszym instytucie badano grupy będące produktami półprostymi grupy abelowej i nilpotentnej, zapisywane zwykle AN. Taka grupa jest rozwiązalna. Naturalne jest pytanie czy dwolną grupę rozwiązalną da się tak zapisać, a jeśli nie to jak "daleko" jest dowolna grupa rozwiązalna od grup tje postaci. Podalgebra Cartana daje tu odpowiedź: mamy

$$A = C + [A, A]$$

i $N = [A, A]$ jest nilpotentna. A więc ogólnie zamiast abelowgo C musimy dopuszczać nilpotenentne C. Może się też zdarzyć że $C \cap [A, A] \neq \{0\}$ czyli suma nie jest prosta. Ale dla wielu rozumowań ten rozkład jest prawie tak dobry jak suma prosta. Jednym z naturalnych założeń jest że niezerowe λ odpowiadające nietrywialnym A_λ są zawarte w zbiorze $S \subset C^*$ zamkniętym na dodawanie i nie zawierającym zera ("stożku właściwym"). Wtedy $V = \oplus_{\lambda \neq 0} A_\lambda$ jest ideałem nilpotentnym w A i rozkład

$$A = C \oplus V$$

jest przedstawieniem A jako produktu półprostego algebr.

Uwaga: Rozkład na sumę A_λ wymaga ciała algebraicznie domkniętego. Ale V ma sens dla dowolnego ciała charakterystyki 0, czyli rozkłady używające V działają nad tymi ciałami.