Grupy i algebry Liego, wykład 12

W. Hebisch

30 maja 2023

1 Forma Killinga i kryterum Cartana

Definicja. Niech A będzie skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem. Formę

$$K(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$$

nazywamy formą Killinga A.

Lemat 1.1 *Forma Killinga jest niezmiennicza:*

$$K([z,x],y) + K(x,[z,y]) = 0.$$

Proof:

$$K([z,x],y)+K(x,[z,y]) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_z\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_z\mathrm{ad}_y) + \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_z\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_z)$$

$$= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_z\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_z)$$

$$= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_z\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_z\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) = 0.$$

□

Lemat 1.2 *Forma Killinga obcięta do ideału to forma Killinga ideału.*

Proof: Dowód zostawiam jako ćwiczenie dla czytelnika. □

Niech A będzie skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętymi F charakterystki 0 i niech C będzie podalgebrą Cartana w C. Mamy wtedy rozkład

$$A = C \oplus \oplus_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$$

gdzie $\Lambda = \{\alpha : \alpha \neq 0, A_\alpha \neq \{0\}\}$.

Lemat 1.3 *(Weyl) Jeśli $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$, $h = [e,f]$, $\beta \neq 0$, $A_\beta \neq \{0\}$ to istnieje liczba wymierna $r_{\alpha,\beta}$ zależna od α, β lecz niezależna od wyboru e, f, taka że $\beta(h) = r_{\alpha,\beta}\alpha(h)$.*

Dowód: Niech $V = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A_{\beta+n\alpha}$. V jest $\mathrm{ad}_e, \mathrm{ad}_f$ i ad_h niezmiennicza. Skoro $h = [e, f]$ to $\mathrm{Tr}_V(\mathrm{ad}_h) = 0$. Czyli

$$\sum_{n\in Z} (\beta(h) + n\alpha(h)) \dim(A_{\beta+n\alpha}) = 0$$

czyli

$$\beta(h) \sum_{n\in Z} \dim(A_{\beta+n\alpha}) = -\alpha(h) \sum_{n\in Z} n \dim(A_{\beta+n\alpha})$$

i

$$\beta(h) = -\frac{\sum_{n\in Z} n \dim(A_{\beta+n\alpha})}{\sum_{n\in Z} \dim(A_{\beta+n\alpha})} \alpha(h)$$

□

Lemat 1.4 *Jeśli A jest algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0, taką że $A = [A, A]$ to forma Killinga A jest niezerowa.*

Dowód: Bez zmniejszania ogólności można zakładać że ciało podstawowe jest algebraicznie domknięte. Niech C będzie podalgebrą Cartana w A. Mamy

$$A = \oplus_\alpha A_\alpha$$

gdzie $A_0 = C$. Ponieważ dla $\beta \neq -\alpha$ mamy $[A_\alpha, A_\beta] \subset A_{\alpha+\beta}$ założenie że $[A, A] = A$ implikuje że $C = \mathrm{lin}[A_\alpha, A_{-\alpha}]$. W szczególności istnieje $\alpha \neq 0$, $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$ takie że $h = [e, f] \neq 0$. Z lematu 1.3 wynika teraz że

$$K(h, h) = \sum_\beta \beta(h)^2 \dim(A_\beta) = \alpha(h)^2 \sum_\beta r_{\alpha,\beta}^2 \dim(A_\beta).$$

Suma po β powyżej jest sumą liczb nieujemnych, przy tym $r_{\alpha,\alpha} = 1$, $\dim(A_\alpha) > 0$, czyli suma jest dodatnia. A więc $K(h, h) = 0$ implikuje że $\alpha(h) = 0$ i konsekwentnie dla dowolnego β takiego że $A_\beta \neq 0$ mamy $\beta(h) = 0$. C jest rozpinane przez wektory h jak wyżej, gdyby dla dowolnego takiego h zachodziło $K(h, h) = 0$ to jedynym α takim że $A_\alpha \neq \{0\}$ byłoby 0, czyli $A = C$ byłaby nilpotentna. Lecz to przeczyłoby warunkowi $[A, A] = A$. □

Lemat 1.5 *(Kryterium Cartana). Jeśli A jest skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0 to*

- *A jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy gdy A jest ortogonalne do $[A, A]$ względem formy Killinga*
- *A jest półprosta wtedy i tylko wtedy gdy forma Killinga A jest niezdegenerowana*

Dowód: Jeśli A jest rozwiązalna, to po rozszerzeniu ciało do ciała algebraicznie domkniętego, na mocy twierdzenia Liego dla $x \in A$, $y \in [A, A]$ operator

$\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y$ jest nilpotentny, czyli $K(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) = 0$. Jeśli A jest ortogonalne do $[A,A]$ względem formy Killinga, ale A nie jest rozwiązalna to definiując $A_0 = A$, $A_{k+1} = [A_k, A_k]$ dla pewnego $k \geq 1$ mielibyśmy $A_k = A_{k+1} = [A_k, A_k]$. A_k są ideałami A, a więc forma Killinga A_k jest obcięciem formy Killinga A do A_k. Czyli forma Killinga A_k byłaby zerowa. Ale na mocy lematu 1.4 jest to niemożliwe, co kończy dowód pierwszej części twierdzenia.

Jeśli $I \subset A$ jest nietrywialnym ideałem rozwiązalnym to rozważając $I_0 = I$, $I_{k+1} = [I_k, I_k]$ widzimy że A zawierałaby nietrywialny ideał abelowy (takim ideałem jest I_k z maksymalnym k takim że $I_k \neq \{0\}$). Jeśli I jest ideałem abelowym, $x \in A$, $y \in I$ to I jest podprzestrzenią niezmienniczą dla ad_x i dla ad_y czyli I jest nieziennicze dla $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y$. Na I mamy $\mathrm{ad}_y = 0$ czyli $\mathrm{Tr}_I(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) = 0$. Skoro $\mathrm{ad}_y(A) \subset I$ to na przestrzni ilorazowej A/I operator ad_y indukuje operator zerowy i

$$K(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) = \mathrm{Tr}_I(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) + \mathrm{Tr}_{A/I}(\bar{\mathrm{ad}}_x\bar{\mathrm{ad}}_y) = 0$$

gdzie $\bar{\mathrm{ad}}_x$ i $\bar{\mathrm{ad}}_y = 0$ są operatorami na A/I indukownymi przez ad_x i ad_y. A więc gdyby A nie była półprosta to forma Killinga K byłaby zdegenerowana.

Pozostaje pokazać że algebra półprosta ma niezdegenerowaną formę Killinga. Nie wprost, gdyby A była półprosta, zaś K byłaby zdegenerowana to $I = \{x \in A : \forall_{y \in A} K(x,y) = 0\}$ byłby ideałem A z zerową formą Killinga. Na mocy pierwszej części I były ideałem rozwiązalnym, co przeczyłoby półprostocie. Czyli $I = \{0\}$ i K jest niezdegenerowana. □

Lemat 1.6 *Niech A będzie skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0 i niech $\mathrm{Der}(A)$ będzie algebrą Liego różniczkowań A. Wtedy odwzorowanie $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ zadaje izomorfizm A z $\mathrm{Der}(A)$*

Dowód: Jądrem odwzorowania $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ jest centrum A, skoro A jest półprosta to centum jest trywialne i A jest izomorficzne ze swoim obrazem $\tilde{A}$ w $\mathrm{Der}(A)$. $\tilde{A}$ jest ideałem w $\mathrm{Der}(A)$:

$$[d, \mathrm{ad}_x](z) = d([x,z]) - [x, d(z)] = [d(x), z] + [x, d(z)] - [x, d(z)]$$
$$= [d(x), z] = \mathrm{ad}_{d(x)}(z).$$

A więc forma Killinga algebry $\mathrm{Der}(A)$ na $\tilde{A}$ jest identyczna z formą Killinga $\tilde{A}$ czyli jest niezdegenerowana. Niech $I = \{d \in \mathrm{Der}(A) : \forall_{x \in \tilde{A}} K(d,x) = 0\}$. Mamy wtedy $\mathrm{Der}(A) = \tilde{A} \oplus I$. Mianowicie, dla $d \in \mathrm{Der}(A)$ i $x \in \tilde{A}$ definujemy $\beta_d(x) = K(d,x)$. Skoro K jest niezdegenerowana na $\tilde{A}$ to istnieje $y \in \tilde{A}$ taki że $\beta_d(x) = K(y,x)$. Teraz dla dowolnego $x \in \tilde{A}$ mamy $K(d-y,x) = 0$, czyli $d - y \in I$, co pokazuje że $d \in \tilde{A} + I$. Jako że d jest dowolne to $\mathrm{Der}(A) = \tilde{A} + I$. Jeśli $x \in I \cap \tilde{A}$ to x leży jądrze K obciętego do $\tilde{A}$, co dzieki temu że K jest niezdegenerowana na $\tilde{A}$ oznacza że $x = 0$, czyli suma $\tilde{A} + I$ jest sumą prostą.

Forma Killinga jest niezmiennicza, a więc I jest ideałem: dla $d \in I$, $x \in \tilde{A}$, $z \in \mathrm{Der}(A)$ mamy $[z,x] \in \tilde{A}$ i

$$K([z,d],x) = -K(d,[z,x]) = 0$$

czyli $[z,d] \in I$. Teraz dla $d \in I$ i $x \in \tilde{A}$ mamy $[d,x] \in \tilde{A} \cap I = \{0\}$. Lecz, jak to obliczyliśmy wyżej $[d, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{d(x)}$, czyli $d = 0$, co oznacza że $I = \{0\}$ i

$\mathrm{Der}(A) = \tilde{A}$. ☐

Definicja: Mówimy że operator S na przestrzeni wektorowej V jest półprosty jeśli V ma bazę złożoną z wektorów własnych S.

Lemat 1.7 *Jeśli V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem algebraicznie domkniętym zaś A jest operatorem liniowym na V, to istnieją operatory S i N takie że $A = S + N$, S jest półprosty, N jest nilpotentny i S komutuje z każdym operatorem komutującym z A.*

Dowód: Jeśli A ma tylko jedną wartość własną a to $S = aI$ i $N = A - S$ daje żądany rozkład. Mianowicie, skoro A ma tylko jedną wartość własną to wielomian minimaly A to $(X-a)^k$ dla pewnego k, czyli $N^k = (A-aI)^k = 0$ i N jest nilpotentny. Oczywiście S jest półprosty i komutuje z każdym operatorm a więc tym bardziej z każdym operatorem komutującym z A.

Jeśli A ma wartości własne $a_1, \ldots, a_n$ to niech $V_i = \{v \in V : (A-a_iI)^{\dim(V)}v = 0\}$. Jeśli B komutuje z A to dla $v \in V_i$ mamy $(A - a_iI)^{\dim(V)}Bv = B(A - a_iI)^{\dim(V)}v = 0$, czyli $Bv \in V_i$. Innymi słowy, podprzestrzenie V_i są niezmiennicze dla B. Lecz $V = \oplus V_i$ czyli jeśli zbudujemy rozkład na każdym z V_i z osobna to będzie miał żądane własności: skoro V_i są niezmiennicze dla B to S komutując z B na każdym z V_i z osobna będzie komutował z B. Oczywiście S będąc sumą prostą operatorów półprostych jest półprosty, N będąc sumą prostą operatorów nilpotentnych jest nilpotentny. ☐

Lemat 1.8 *Niech A będzie skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 i niech C będzie podalgebrą Cartana w A. Niech $A = \oplus_\alpha A_\alpha$ gdzie $A_0 = C$. Dla $\alpha \neq -\beta$ przestrzenie A_α i A_β są ortogonalne względem formy Killinga. Forma Killinga A obcięta do C jest niezdegenerowana. Ponadto forma Killinga zadaje dualność między A_α a $A_{-\alpha}$.*

Dowód: Wiemy że $[A_\alpha, A_\gamma] \subset A_{\alpha+\gamma}$, a więc dla $x \in A_\alpha$, $y \in A_\beta$ mamy $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y(A_\gamma) \subset A_{\alpha+\beta+\gamma}$ i $(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y)^k(A_\gamma) \subset A_{k(\alpha+\beta)+\gamma}$. Jeśli $\alpha \neq -\beta$ dla dowolnego γ takiego że $A_\gamma \neq \{0\}$ i dużych k mamy $A_{k(\alpha+\beta)+\gamma} = \{0\}$, czyli $\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y$ jest nilpotentny, czyli $K(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y) = 0$. Skoro forma Killinga jest niezdegenerowana zaś dla $\alpha \neq -\beta$ A_α jest ortogonalne do A_β to $A_{-\alpha}$ musi być dualne do A_α. W szczególności dla $\alpha = 0$ oznacza to że forma Killinga obcięta do C jest niezdegenerowana. ☐