Grupy i algebry Liego, wykład 13

W. Hebisch

6 czerwca 2023

1 Struktura algebr półprostych

Przypominam lemat z poprzedniego wykładu:

Lemat 1.1 *Niech A będzie skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0 i niech $\mathrm{Der}(A)$ będzie algebrą Liego różniczkowań A. Wtedy odwzorowanie $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ zadaje izomorfizm A z $\mathrm{Der}(A)$*

Lemat 1.2 *Niech A będzie skończenie wymiarową półprostą algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 i niech C będzie podalgebrą Cartana w A. C jest przemienna i dla $x \in C$ operator ad_x jest półprosty.*

Dowód: Dla $x, y \in C$ mamy

$$K(x, y) = \sum \alpha(x)\alpha(y) \dim(A_\alpha)$$

Jeśli $y \in [C, C]$ to wtedy $\alpha(y) = 0$ dla dowolnego α takiego że $A_\alpha \neq \{0\}$. A więc wtedy $K(x, y) = 0$, czyli $y = 0$ bo forma Killinga obcięta do C jest niezdegenerowana. Konsekwentnie $[C, C] = \{0\}$ i C jest przemienna.

Dla $x \in C$ niech $\mathrm{ad}_x = S + N$ będzie rozkładem ad_x na część półprostą i nilpotentną. S jest różniczkowaniem A: dla $y \in A_\alpha$, $z \in A_\beta$ mamy $[y, z] \in A_{\alpha+\beta}$, $S(y) = \alpha(x)y$, $S(z) = \beta(x)z$ a więc

$$S([y, z]) = (\alpha + \beta)(x)[y, z] = [\alpha(x)y, z] + [y, \beta(x)z] = [S(y), z] + [y, S(z)].$$

Na mocy 1.1 istnieją $s, n \in A$ takie że $\mathrm{ad}_s = S$ i $\mathrm{ad}_n = N$. S komutuje z każdymo operatorm komutującym z ad_x, a więc w szczególności S komutuje z ad_y dla dowolnego $y \in C$. A więc jeszcze raz używając 1.1 widzimy że s komutuje z C, czyli s należy do normalizatora C, czyli $s \in C$. Skoro $x = s + n$ to również $n \in C$. Jednakże ad_n jest nilpotentny, czyli $\alpha(n) = 0$ dla α takich że $A_\alpha \neq \{0\}$, czyli jak poprzednio $n = 0$, co oznacza że $\mathrm{ad}_x = S$ jest półprosty. □

Niech $\Lambda = \{\alpha \neq 0 : A_\alpha \neq \{0\}\}$. Przy założeniach jak wyżej forma Killinga jest niezdegenerowana na C, a więc dla $\alpha \in \Lambda$ istnieje dokładnie jeden $h_\alpha \in C$ takie że $\alpha(x) = K(h_\alpha, x)$ dla dowolnego $x \in C$.

Lemat 1.3
- *Jeśli $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$ to $[e, f] = K(e, f)h_\alpha$.*
- $\alpha(h_\alpha) \neq 0$

- $\{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ *rozpina* C

- *Jeśli* $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$, $K(e,f) \neq 0$ *to podalgebra* A *generowana przez* e, f *i* h_α *jest izomorficzna z* $\mathrm{sl}(2,F)$

- *Przestrzenie* A_α *są jednowymiarowe*

- *Jeśli* $\alpha, t\alpha \in \Lambda$ *to* $t \in \{-1, 1\}$

- *Jeśli* $\alpha, \beta \in \Lambda$ *to* $2K(h_\alpha, h_\beta)/K(h_\alpha, h_\alpha)$ *jest liczbą całkowitą*

Dowód: Niech $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$. Dla $x \in C$ mamy

$$K([e,f],x) = -K(f,[e,x]) = \alpha(x)K(f,e) = K(f,e)K(h_\alpha,x)$$

czyli $K([e,f] - K(e,f)h_\alpha, x) = 0$ co na mocy niezdegenerowania K na C oznacza że $[e,f] = K(e,f)h_\alpha$. A więc pokazaliśmy pierwszy punkt.

Na mocy lematu Weyla dla dowolnego $\beta \in \Lambda$ mamy $\beta(h_\alpha) = c_{\alpha,\beta}\alpha(h_\alpha)$, czyli $\alpha(h_\alpha) = 0$ implikowałoby $\beta(h_\alpha) = 0$, czyli (jak w dowodzie 1.2) h_α byłoby ortogonelne do C względem formy Killinga i $h_\alpha = 0$. Lecz $\alpha \neq 0$, więc $h_\alpha \neq 0$ co oznacza że $\alpha(h_\alpha) \neq 0$.

A jest półprosta, więc $A = [A,A] = \mathrm{lin}[A_\alpha, A_\beta]$ Dla $\alpha \neq -\beta$ dostajemy składniki rozkładu różne od C, a więc $C = \mathrm{lin}_{\alpha\neq 0}[A_\alpha, A_{-\alpha}]$. Na mocy poprzedniego punktu $[A_\alpha, A_{-\alpha}]$ jest rozpinane przez h_α, czyli $C = \mathrm{lin}\{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

Aby pokazać trzeci punkt niech $g = 2f/(\alpha(h_\alpha)K(e,f))$. Wtedy $K(e,g) = K(e,f)/(\alpha(h_\alpha)K(e,f)) = 2/\alpha(h_\alpha)$, $h = [e,g] = K(e,g)h_\alpha = 2h_\alpha/\alpha(h_\alpha)$ i $\alpha(h) = 2\alpha(h_\alpha)/\alpha(h_\alpha) = 2$. A więc $[h,e] = \alpha(h)e = 2e$ i $[h,g] = -\alpha(h)g = -2g$ co oznacza że h, e, g spełniają te same relacje komutacji co

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli $h \mapsto H$, $e \mapsto X$, $g \mapsto Y$ zadaje izomorfizm.

Przypuśćmy teraz że A_α ma wymiar większy niż 1. Wtedy istniałby $z \in A_\alpha$ taki że $z \neq 0$, lecz $K(z,g) = 0$. A więc $[g,z] = K(z,g)h_\alpha = 0$, czyli z generowały skończenie wymiarowy moduł M nad $\mathrm{sl}(2,F)$ taki że wszystkie wartości własne h byłyby dodanie. Dokładniej niech $z_0 = 0$ i $z_{k+1} = [e, z_k]$. Zauważmy że istnieją stałe c_k takie że $[g, z_k] = c_k z_{k-1}$ dla $k \geq 0$ (gdzie $c_0 = 0$ i $z_{-1} = 0$). Mianowicie indukcyjnie $[g, z_{k+1}] = [g,[e,z_k]] = [[g,e],z_k] + [e,[g,z_k]] = -[h,z_k] + [e, c_k z_{k-1}] = -2kz_k + c_k z_k$ czyli $M = \mathrm{lin}\{\mathrm{ad}_e^k(z) : k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$ bo ta podprzestrzeń jest niezmiennicza na działanie h, e, g. Ale taki moduł M nie istnieje co oznacza że przestrzeń A_α jest jednowymiarowa.

Podobnie, jeśli $A_{t\alpha}$ jest nietrywialne to h musi mieć całkowitą wartość własną na $A_{t\alpha}$, czyli $2t \in \mathbb{Z}$. Ale rola α i $t\alpha$ jest symetryczna, czyli również $2/t \in \mathbb{Z}$. Gdyby $t = 2$ to $A_{2\alpha} = \mathrm{ad}_e(A_\alpha)$ lecz jest to niemożliwe bo A_α jest rozpinane przez e i $\mathrm{ad}_e(A_\alpha) = \{0\}$. Przez symetrię wykluczone jest również $t = -2$, $t = 1/2$, i $t = -1/2$. A więc jedne możliwości które pozostają to $t = -1$ lub $t = 1$.

Aby pokazać ostatni punkt rozważmy podalgebrę A generowaną przez h_α, e, f. Jak wiemy ta algebra jest izomorficzna z $\mathrm{sl}(2,F)$. Niech $H = 2h_\alpha/K(h_\alpha,h_\alpha)$. Z opisu skończenie wymiarowych modułów nad $\mathrm{sl}(2,F)$ wiemy że w dowolnym takim module H ma całkowite wartości własne. Rozważmy działanie

H na $x \in A_\beta$: $[H,x] = 2\beta(h_\alpha)/K(h_\alpha,h_\alpha) = 2K(h_\beta,h_\alpha)/K(h_\alpha,h_\alpha)$, czyli $2K(h_\beta,h_\alpha)/K(h_\alpha,h_\alpha)$ jako wartość własna H jest liczbą całkowitą. $\square$

Lemat 1.4 *$\alpha(h_\alpha) \in \mathbb{Q}$ i $\alpha(h_\alpha) > 0$. Niech $V = \mathrm{lin}_\mathbb{Q}\{h_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Forma Killinga obcięta do V przyjmuje wartości wymierne i jest dodatnio określona. Ponadto, jeśli $S \subset \Lambda$ i $\Delta = \{h_\alpha : \alpha \in S\}$ jest bazą C nad F, to Δ jest bazą V.*

Dowód: $\alpha(h_\alpha) = K(h_\alpha,h_\alpha) = \sum_{\beta\in\Lambda}\beta(h_\alpha)^2 = \sum_{\beta\in\Lambda}(r_{\alpha,\beta}\alpha(h_\alpha))^2$ czyli

$$\alpha(h_\alpha) = \frac{1}{\sum_{\beta\in\Lambda} r_{\alpha,\beta}^2},$$

więc $\alpha(h_\alpha) \in \mathbb{Q}$ i $\alpha(h_\alpha) > 0$.

Jeśli $h = \sum q_\alpha h_\alpha$, to $\beta(h) = \sum_{\alpha,\beta\in\Lambda} q_\alpha r_{\alpha,\beta}\alpha(h_\alpha)$ czyli $\beta(h) \in \mathbb{Q}$. Jeśli $h_1, h_2 \in V$ to $K(h_1,h_2) = \sum_{\beta\in\Lambda}\beta(h_1)\beta(h_2) \in \mathbb{Q}$ i $K(h,h) = \sum_{\beta\in\Lambda}\beta(h)^2 \geq 0$. Jeśli $K(h,h) = 0$ to dla każdego $\beta \in \Lambda$ mamy $\beta(h) = 0$ i h jest ortogonalne względem formy Killinga do C, czyli $h = 0$.

Niech Δ jak wyżej będzie bazą C nad F, $\tilde{V} = \mathrm{lin}_\mathbb{Q}(\Delta)$ i niech $\beta \in \Lambda$. Dla $h_\alpha \in \Delta$ mamy $\beta(h_\alpha) = K(h_\beta,h_\alpha) \in \mathbb{Q}$ czyli $\beta \in \tilde{V}^*$, czyli istnieje $\tilde{h} \in \tilde{V}$ taki że $\beta(h) = K(\tilde{h},h)$ dla $h \in \tilde{V}$. Jednakże $\Delta \subset \tilde{V}$ jest bazą C nad F, więc $\beta(h) = K(\tilde{h},h)$ dla $h \in C$, czyli $\tilde{h} = h_\beta$, a więc $h_\beta \in \tilde{V}$. $\square$

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią nad ciałem F charakterystyki 0. Zakładamy że na V jest zadany iloczyn skalarny. Dla wektora $v \in V$ odbicie σ_v w kierunku v definiujemy wzorem

$$\sigma_v(x) = x - 2\frac{v(v,x)}{(v,v)}$$

gdzie zakładamy że $(v,v) \neq 0$. Dla $F = \mathbb{R}$ jest to klasyczna definicja, ale te same własności dostaniemy dla innych ciał.

Lemat 1.5 *Istnieje automorfizm $\phi : A \mapsto A$ taki że $\phi(C) = C$, $\phi(h_\alpha) = -h_\alpha$ i $\phi(h) = h$ dla $h \in C$ takich że $\alpha(h) = 0$. Innymi słowy, $\phi|_C$ jest odbiciem w kierunku h_α.*

Dowód: Wybieramy $e \in A_\alpha$, $f \in A_{-\alpha}$, tak by $\alpha([e,f]) = 2$. Wtedy podalgebra A generowana nad $\mathbb{Q}$ przez $[e,f], e, f$ jest izomorficzna z $\mathrm{sl}(2,\mathbb{Q})$. Niech

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przy izomorfiźmie $[e,f]$ przechodzi na H, e przechodzi na X, f przechodzi na Y. Zauważmy że ad_e i ad_f są nilpotentnymi automorfizmami A, dlatego $\psi_1 = \exp(\mathrm{ad}_e) = \sum \mathrm{ad}_e^k/k!$ i $\psi_2 = \exp(-\mathrm{ad}_f) = \sum(-\mathrm{ad}_f)^k/k!$ są dobrze zdefinowanymi automorfizmami A. Pokażemy że $\phi = \psi_1\psi_2\psi_1$ jest pożądanym automorfizmem. Mianowicie, jeśli $h \in C$ i $\alpha(h) = 0$ to $[h,e] = [h,f] = 0$, czyli $\mathrm{ad}_e(h) = \mathrm{ad}_f(h) = 0$ i konsekwentnie $\psi_1(h) = \psi_2(h) = 0$, wiec $\phi(h) = h$.

Pozostaje pokazać że $\phi([e,f]) = -[e,f]$. Dzięki izomorfizmowi algebry generowanej przez $[e,f], e, f$ z $\mathrm{sl}(2,\mathbb{Q})$ jest to ćwiczenie na mnożenie macierzy 2 na 2. Dokładniej, wystarczy wykonać obliczenia używając ad_X i ad_Y zamiast ad_e i ad_f. Dla $Z \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{Q})$ mamy $\mathrm{ad}_X(Z) = XZ - ZX = L_X(Z) - R_X(Z)$ gdzie L_X jest operatorem mnożenia z lewej strony, zaś R_X operatorem mnożenia z prawej strony. Ponieważ mnożenie z lewej komutuje z mnożeniem z prawej many $\exp(\mathrm{ad}_X) = L_{\exp(X)} R_{\exp(-X)}$ i konsekwentnie $\phi([e,f])$ przechodzi przy izomorfiźmie na $L_{\exp(X)\exp(-Y)\exp(X)} R_{\exp(-X)\exp(Y)\exp(-X)} H$. Teraz

$$\exp(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(-Y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(X)\exp(-Y)\exp(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\exp(X)\exp(-Y)\exp(X)} R_{\exp(-X)\exp(Y)\exp(-X)} H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -H.$$

$\square$

Definicja: Niech V będzie jak w definicji odbicia. Mówimy że skończony podzbiór $\Lambda \subset V$ jest *systemem pierwiastków* jeśli $0 \notin \Lambda$, Λ rozpina V i dla każdego $v \in \Lambda$ mamy $\sigma_v(\Lambda) \subset \Lambda$. Mówimy że Λ jest *krystalograficzny* jeśli $2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta) \in \mathbb{Z}$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in \Lambda$. Mówimy że Λ jest zredukowany jeśli dla $\alpha, t\alpha \in \Lambda$ implikuje że $t \in \{-1, 1\}$.