Grupy i algebry Liego, wykład 14

W. Hebisch

13 czerwca 2023

1 Struktura algebr półprostych 2

Przypominam że rozpatrujemy półprostą algebrę Liego A nad ciałem charakterystyki 0. A zawiera podalgebrę Cartana C. Zdefiniowaliśmy wektory h_α jako takie wektory że dla niezerowych funkcjonałów pierwiastkowych α mamy $K(x, h_\alpha) = \alpha(h_\alpha)$. V jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{Q}$ rozpinanną przez h_α. $\Lambda = \{h_\alpha\}$.

Definicja Powiemy że układ pierwiastków Λ na V jest rozkładalny, jeśli $V = V_1 \oplus V_2$ i $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ gdzie $\Lambda_i = \Lambda \cap V_i$ dla $i = 1, 2$. Powiemy że układ pierwiastków jest nierozkładalny jeśli nie jest rozkładalny.

Lemat 1.1 *Jeśli Λ jest układem pierwiastków na V to istnieją podprzestrzenie V_i i układy pierwiastków Λ_i na V_i takie że*

$$V = \oplus_i V_i,$$

$$\Lambda = \bigcup_i \Lambda_i$$

i Λ_i jest nierozkładalny. Taki rozkład jest jednoznaczny. Ponadto, jesli Λ jest układem pierwiastków A jak wyżej, to istnieją podalgebry B_i takie że

$$A = \oplus_i B_i$$

i Λ_i jest układem pierwiastków B_i.

Dowód: Jeśli mamy rozkład Λ jak wyżej to zauważmy że V_i są wzajemnie ortogonalne. Mianowicie, odbicie względem $\lambda_1 \in \Lambda_1$ przekstałaca $\lambda_2 \in \Lambda_2$ na $\lambda_2 + c\lambda_1$ dla pewnego c. Jednakże $\lambda_2 + c\lambda_1$ jest elementem Λ wtedy i tylko wtedy gdy $c = 0$. To zaś oznacza że λ_1 jest ortogonalne do λ_2. Jako że $\lambda_1 \in \Lambda_1$ był dowolny i Λ_1 rozpina V_1 to V_1 jest ortogonalne do λ_2. Rozumując podobnie widzimy że V_1 jest ortogonalne do V_2 i ogólniej V_i jest ortogonalne do V_j dla $i \neq j$.

Teraz na Λ wprowadzamy relację r tak że $r(\alpha, \beta)$ wtedy i tylko wtedy gdy α i β nie są ortogonalne. Niech r^* będzie domknięciem tranzytywnym r. r^* jest relacją równowazności. Jako Λ_i bierzemy klasy abstrakcji r^* a jako V_i przestrzenie rozpinane przez Λ_i. Z określenia widać że V_i są wzajemnie ortogonalne, czyli dają rozkład V. Jak pokazaliśmy rozkładalność implikuje ortogonalność składników rozkładu. Ale z definicji Λ_i nie da się podzielić na wzajemnie ortogonalne podzbiory, więc Λ_i są nierozkładalne. Co więcej, jeśli $\Lambda = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ jest rozkładem Λ jak wyżej i $\Gamma_1 \cap \Lambda_i \neq \emptyset$ to $\Lambda_i \subset \Gamma_1$. Co więcej, elementy $\Gamma_1 - \Lambda_i$

(tu jest różnica teoriomnogościowa) są ortogonalne do Λ_i i dałyby rozkład Γ_1 czyli jeśli Γ_1 jest nierozkładalne to $\Lambda_i = \Gamma_1$. To daje jednoznaczność rozkładu.

Jeśli $\Lambda = \{h_\alpha\}$ jest układem pierwiastków A to bierzemy

$$\tilde{\Lambda}_i = \{\alpha : h_\alpha \in \Lambda_i\},$$

$$C_i = \mathrm{lin}(\Lambda_i),$$

$$B_i = C_i \oplus \oplus_{\alpha:\tilde{\Lambda}_i} A_\alpha.$$

Zauważmy najpierw że

$$A = \oplus_i B_i$$

jako przestrzeń wektorowa. Pozostaje pokazać że B_i są podalgebrami i że wzajemnie komutują.

Dla $i \neq j$ ze względu na ortogonalność C_i do Λ_j C_i komutuje z A_α dla $\alpha \in \tilde{\Lambda}_i$, czyli C_i komutuje z B_j. Dla $\alpha \in \tilde{\Lambda}_i$ i $\beta \in \tilde{\Lambda} = \bigcup_j \tilde{\Lambda}_j$ mamy $\alpha + \beta \in \tilde{\Lambda}$ implikuje $\beta \in \tilde{\Lambda}_i$. A więc B_i są podalgebrami i dla $i \neq j$ B_i komutuje z B_j. $\square$

Lemat 1.2 *Niech A, V, Λ będą jak wyżej (na V rozpatrujemy iloczyn skalarny wyznaczony przez formę Killinga). Λ jest zredukowanym krystalograficznym układem pierwiastków na V. A jest wyznaczona przez Λ z dokładnością do izomorfizmu. Dla dowolnego zredukowanego krystalograficznego układu pierwiastków Λ istnieje półprosta algebra Liego $A_{\Lambda,F}$ nad F z Λ jako układem pierwiastków. Ponadto istnieje półprosta algebra Liego A_Λ nad $\mathbb{Q}$ taka że jej podalgebra Cartana diagonalizuje się i Λ jest jej układem pierwiastków (innymi słowy, w odpowiedniej bazie można A zdefiniować nad liczbami wymiernymi).*

Szkic dowodu: Na mocy lematu z poprzedniego wykładu Λ jest układem pierwiastków. Podobnie Λ jest zredukowanym układem krystalograficznym. A priori Λ zależy od wyboru podalgebry Cartana. Jednakże wszystkie podalgebry Cartana A są sprzężone, tzn. dla dowolnych podalgebr Cartana $C_1, C_2 \subset A$ istnieje automorfizm A przeprowadzający C_1 na C_2 (to twierdzenie przyjmujemy bez dowodu). Oznacza to że układ pierwiastków jest wyznaczony przez A z dokładnością do izomorfizmu. Istnienie algebry z zadanym układem pierwiastków dowodzimy dla każdego nierozkładalnego układu pierwiastków z osobna. Pomijam dowód pozostałej części twierdzenia. $\square$

Pokazaliśmy że rozkładalne układy pierwiastków odpowiadają sumom prostym algebr. Teraz chcemy wyznaczyć strukturę nierozkładalnych układów pierwiastków, to nam da pełny opis algebr półprostych nad ciałami algebraicznie domkniętymi charakterystyki 0.

Lemat 1.3 *Niech Λ będzie układem pierwiastów w przestrzni dwuwymiarowej nad $\mathbb{R}$ zaś $e_\alpha = \alpha/|\alpha|$ dla $\alpha \in \Lambda$. Wtedy e_α są wierzchołkami $2n$-kąta foremnego dla pewnego $n \in Z$.*

Dowód: e_α są wektorami jednostkowej długości, każdy z nich wyznacza punkt na okręgu jednostkowym. Ponumerujmy α tak by te punkty wypadały po kolei, tzn. $e_{\alpha_{j-1}}$ i $e_{\alpha_{j+1}}$ są najbliższymi punktami do e_{α_j} (i leżą po różnych stronach). Skoro układ pierwiastków jest niezmienniczy na odbicia w kierunku swoich elementów, to $\sigma_{e_{\alpha_j}}(e_{\alpha_{j-1}}) = -e_{\alpha_{j+1}}$, czyli kąt między $e_{\alpha_{j-1}}$ a e_{α_j} jest taki sam jak kąt między e_{α_j} a $e_{\alpha_{j+1}}$, co oznacza że e_α są wierzchołkami wielokąta foremnego. Ponieważ $\alpha \in \Lambda$ implikuje $-\alpha \in \Lambda$, moc $\{e_\alpha\}$ jest parzysta. $\Box$

Niech $\omega \in V$ będzie wektorem takim że $(\alpha, \omega) \neq 0$ dla $\alpha \in \Lambda$, $\Lambda_+ = \{\alpha \in \Lambda : (\alpha, \omega) > 0\}$. Λ_+ nazywamy zbiorem pierwiastków dodatnich.

Lemat 1.4 *Niech $\Delta \subset \Lambda_+$ będzie zbiorem tych elementów Λ_+ które dają wszystkie kierunki ekstremalne stożka wypukłego generowanego przez Λ_+. Wtedy dla $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$ mamy $(\alpha, \beta) \leq 0$. Co więcej kąt pomiędzy α a β to $(n-1)\pi/n$ dla pewngo $n \in \mathbb{Z}$. Ponadto Δ jest bazą V.*

Dowód: Wiadomo że dowolny element właściwego domkniętego stożka wypukłago jest kombinacją liniową o współczynnikach dodatnich elementów zadających kierunki ekstremalne. Czyli każdy element Λ_+ jest kombinacją linową elementów z Δ. Ponieważ $\Lambda = \Lambda_+ \cup -\Lambda_+$ to również każdy element z Λ jest kombinacją linową elementów z Δ. Lecz Λ rozpina V czyli Δ rozpina V. Jeśli V jest jednowymiarowe to Δ składa się z jednego elementu i teza jest oczywista. W przeciwnym razie dla $\alpha, \beta \in \Delta$ $\alpha \neq \beta$ rozpatrzmy podprzestrzeń $V_{\alpha,\beta} = \mathrm{lin}\{\alpha, \beta\} \subset V$. Niech $\Omega = \Lambda \cap V_{\alpha,\beta}$ zaś $\Omega_+ = \Lambda_+ \cap V_{\alpha,\beta}$. Ω jest systemem pierwiastków w przestrzeni dwuwymiarowej zaś Ω_+ odpowiednim układem pierwiastków dodatnich. Z lematu wiemy że po unormowaniu elementy Ω są wierzchołkami $2n$-kąta foremnego. $n \geq 2$, przy tym dla $n = 2$ mamy czworokąt i widać że α i β są ortogonalne. Dla $n > 2$ mamy $|\Omega_+| = n$, czyli pomiędzy α a β musi być $n-1$ innych pierwiasków, czyli kąt pomiędzy α a β to $(n-1)\pi/n$. Dla $n > 2$ to implikuje że $(\alpha, \beta) < 0$.

Aby pokazać że Δ jest liniowo niezależne rozważmy kombinację liniową $\sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha \alpha$. Niech $D_+ = \{\alpha \in \Delta : a_\alpha > 0\}$, $D_- = \{\alpha \in \Delta : a_\alpha < 0\}$ i niech $w = \sum_{\alpha \in D_+} a_\alpha \alpha$, $v = \sum_{\alpha \in D_-} a_\alpha \alpha$. Ponieważ dla $\alpha \in \Lambda_+$ mamy $(\omega, \alpha) > 0$ to $(\omega, w) = \sum_{\alpha \in D_+} a_\alpha (\omega, \alpha) > 0$ czyli $w \neq 0$ o ile $D_+ \neq \emptyset$. Podobnie $v \neq 0$ o ile $D_- \neq \emptyset$. Jeśli nie wszystkie współczynniki rozważanej kombinacji liniowej znikają to co najmniej jeden z D_+ lub D_- jest niepusty. Jeśli dokładnie jeden jest niepusty to poprzednie uwagi pokazują że ta kombinacja jest niezerowa. Jeśli oba są niepuste to $(w+v, w+v) = (w,w) + 2(w,v) + (v,v)$. Następnie $(w,v) = \sum_{\alpha \in D_+, \beta \in D_-} a_\alpha a_\beta (\alpha, \beta) \geq 0$ bo $a_\alpha > 0$, $a_\beta < 0$, $(\alpha, \beta) \leq 0$, czyli $(w+v, w+v) \geq (w,w) + (v,v) > 0$, czyli $w + v \neq 0$ co pokazuje liniową niezależność. $\Box$

Diagramem Coxetera-Dynkina (lub krótko diagramem Dynkina) związanym z Λ nazywany graf którego wierchołkami są elementy Δ zaś krawędzię są pomiędzy takimi $\alpha, \beta \in \Delta$ że $(\alpha, \beta) < 0$. Przy tym krawędzi przypisujemy wagę n jeśli kąt pomiędzy α a β to $(n-1)\pi/n$.

Ogólniej, możemy rozpatrywać układy wektorów Δ takie że dla $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$ kąt pomiędzy α a β to $(n-1)\pi/n$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

W diagramie Dynkina zredukowanego układu pierwiastków mogą się pojawić pierwiastki różnej długości, wtedy krawędź rysujemy jako strzałkę skierowaną w kierunku krótszego wektora.

Lemat 1.5 *Diagram Dynkina nierozkładalnego zredukowanego krystalograficznego układu pierwiastków należy do jednej z wymienionych niżej rodzin:*

- A_n*: n wierzchołków połączonych w łańcuch krawędziami wagi* 3*,*
- B_n*: n wierzchołków z* $n \geq 2$ *połączonych w łańcuch gdzie wagi krawędzi są* 3 *za wyjątkiem ostatniego połączenia które ma wagę* 4 *zaś strzałka jest w kierunku ostatniego wierzchołka,*
- C_n*: n wierzchołków z* $n \geq 3$ *połączonych w łańcuch gdzie wagi krawędzi są* 3 *za wyjątkiem ostatniego połączenia które ma wagę* 4 *zaś strzałka jest w kierunku przedostatniego wierzchołka,*
- D_n*: n wierzchołków z* $n \geq 4$ *gdzie* $n-1$ *wierzchołki są połączone w łańcuch, zaś przedostatni wierzchołek łańcucha jest połączony z ostatnim wierzchołkiem (który nie ma innych połączeń), przy tym wagi połączeń to* 3*,*
- E_6*,* E_7*,* E_8*. n wierzchołków z* $n = 6, 7, 8$ *gdzie* $n-1$ *wierzchołki są połączone w łańcuch, zaś drugi od końca wierzchołek łańcucha jest połączony z ostatnim wierzchołkiem (który nie ma innych połączeń), przy tym wagi połączeń to* 3*,*
- F_4*: cztery wierzchołki połączone w łańcuch, gdzie wagi skrajnych połączeń to* 3 *zaś waga środkowego połączenia to* 4*, przy tym środkowe połączenie jest skierowane (ale wybór kierynku daje izomorficzne diagramy),*
- G_2*: dwa wierzchołki połączone krawędzią wagi* 6 *(która jest skierowane).*

Ponadto istnieje niekrystalograficzny układ pierwiastków w przestrzeni wymiaru 3 *i w przestrzeni wymiaru* 4 *(w obu przypadkach diagam to łańcych ze skrajną krawędzią wagi* 5 *a pozostałymi wagi* 3*) i rodzina niekrystalograficznych układów na płaszczyźnie.*

Lemat 1.6 *Diagram Dynkina nie zawiera cykli.*

Dowód. Jeśli α_i dla $i = 1, \ldots, k$ stanowią cykl, to biorąc $e_i = \alpha_i/|\alpha_i|$ i $v = \sum_{i=1}^k e_i$ mam $(v, v) = \sum_{i=1}^k (e_i, e_i) + 2\sum_{i \neq j}(e_i, e_j)$. Dla $i \neq j$ połączonych krawędzią kąt między e_i a e_j to co najmniej $2\pi/3$, czyli $(e_i, e_j) \leq -1/2$. W cyklu mamy k par i, j połączonych krawędziami, co oznacza że $(v, v) \leq 0$, co dałoby sprzeczność z liniową niezależnością α_i. □

Dla $\alpha \in \Delta$ niech $e_\alpha = \alpha/|\alpha|$. Dla $\alpha, \beta \in \Delta$ niech $q_{\alpha,\beta} = (e_\alpha, e_\beta)$

Lemat 1.7 *Niech* $S \in \Delta$*,* $\alpha \notin S$*. Wtedy* $\sum_{\beta \in S} q_{\alpha,\beta}^2 < 1$

Dowód: Bez zmniejszania ogólności możemy zakładać że $q_{\alpha,\beta} \neq 0$ dla $\beta \in S$. Z poprzedniego lematu (braku cykli) wynika teraz że $q_{\beta_1,\beta_2} = 0$ dla $\beta_1, \beta_2 \in S$, czyli $\{e_\beta \in S\}$ jest bazą ortonormalną pewnej podprzestrzeni $W \subset V$. $e_\alpha \notin W$, czyli rzut e_α na W ma długość mniejszą niż 1. Lecz kwadrat tej długości wynosi $\sum_{\beta \in S}(e_\alpha, e_\beta)^2 = \sum_{\beta \in S} q_{\alpha,\beta}^2$. □

Lemat 1.8 *Spójny diagram Dynkina z krawędzią wagi* ≥ 6 *ma dwa wierzchołki.*

Dowód. Niech α i β będą wierzchołkami połączonymi krawędzią wagi ≥ 6. Gdyby było więcej wierzchołków to istniałaby wierzchołek γ połączony albo z α albo z β. Bez utraty ogólności można zakładać że γ jest połączony z α. Waga 6 oznacza że $q^2_{\alpha,\beta} \geq 3/4$, $q^2_{\alpha,\gamma} \geq 1/4$ co dałoby sprzeczność z poprzednim lematem.

Lemat 1.9 *Wierzchołek diagramu Dynkina jest połączony z co najwyżej trzema innymi wierzchołkami. Jeśli jest połączony z trzema wierzchołkami to wagi krawędzi to* 3. *Żaden wierzchołek nie należy do dwu krawędzi wagi* ≥ 4.

Dowód. To wynika bezpośrednio z lematy o sumie $q^2_{\alpha,\beta}$: $q^2_{\alpha,\beta} \geq 1/4$, a jeśli waga jest większa niż 3 to $q^2_{\alpha,\beta} \geq 1/2$ □

Lemat 1.10 *Diagram Dynkina zawiera co najwyżej jeden punkt rozgałęzienia i co najwyżej jedną krawędź wagi* ≥ 4. *Jeśli jest punkt rozgałęzienia to wszystkie wagi to* 3.

Lematy powyżej i kilka następnych lematów tego typu w sumie daje dowód podanego wyżej twierdzenia o klasyfikacji układów pierwiastków.