Grupy i algebry Liego

W. Hebisch

7 marca 2023

Definicja: Podgrupą jednoparametrową grupy Liego G nazywamy gładki homomorfizm z $\mathbb{R}$ w G. Z definicji podgrupa jednoparametrowa h spełnia

$$h(t_1)h(t_2) = h(t_1 + t_2)$$

Pole wektorowe X_h definujemy wzorem

$$(X_h f)(x) = \partial_t f(h(t)x)|_{t=0}.$$

Z tego wzoru widać że pole X_h jest prawostronnie niezmiennicze.

Lemat 0.1 *Dla każdego X z algebry Liego grupy Liego G istnieje dokładnie jedna podgrupa jednoparametrowa h_X taka że $X_{h_X} = X$. Odwzorwanie $(X, t) \mapsto h_X(t)$ jest gładkie.*

Dowód: Z wzoru wyżej wynika że

$$\partial_t h(t) = X_h(h(t)).$$

To jest równanie różniczkowe zwyczajne z gładkimi współczynnikami. Na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych h jest wyznaczone jednoznacznie. Z twierdzenia o istnieniu rozwiązań równanie wyżej ma rozwiązanie, co najmniej dla dostatecznie małych t, tzn. istnieje $\varepsilon > 0$ takie że równanie ma rozwiązanie dla $|t| < \varepsilon$. Teraz wystarczy zauważyć że jeśli równanie ma rozwiązanie dla $t \in [-T, T]$, to wzór

$$h_1(t) = h(t - T)h(T)$$

zadaje rozwązanie równania dla $t \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$ (używamy tu prawostronną niezmienniczość X). Mamy też $h_1(T) = h(T)$, czyli jest to przedłużenie rozwiązania na przedział $[-T, T + \varepsilon/2]$. Podobnie można rozumować dla $t = -T$, przedłużając rozwiązanie na $[-T - \varepsilon/2, T + \varepsilon/2]$. Teraz indukcyjnie pokazujemy że rozwiązanie istnieje to dowolnych $t \in \mathbb{R}$. Przy okazji rozumowanie wyżej pokazuje że

$$h(t_1 + t_2) = h(t_1)h(t_2)$$

czyli że rozwiązanie h jest podgrupą jednoparametrową.

Gładkość odwzorowania $(X, t) \mapsto h_X(t)$ wynika z twierdzenia o gładkiej zależności rozwiązań równań różniczkowych od parametrów. □

Przykład: Przypominam że grupa Heisenberga to $\mathbb{R}^3$ z mnożeniem zadanym wzorem

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)).$$

Łatwo sprawdzić że proste euklidesowe, tzn. h postaci

$$h(t) = (at, bt, ct)$$

są podgrupami jednoparametrowymi w grupie Heisenberga. Mianowicie, człon $x_1 y_2 - x_2 y_1 = at_1 bt_2 - at_2 b_t 1 = 0$, czyli $h(t_1)h(t_2) = h(t_1 + t_2)$. Z lematu wynika że są to wszystkie podgrupy jednoparametrowe grupy Heisenberga.

Przykład: Macierzowa funkcja wykładnicza

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

daje podgrupy jednoparametrowe w grupie macierzy. Dokładniej, podgrupa h_M jest zadana wzorem

$$h_M(t) = \exp(tM).$$

Tak jak dla klasycznej funkcji wykładniczej mamy $h_M(t_1 + t_2) = h_M(t_1) h_M(t_2)$, czyli faktycznie jest to podgrupa jednoparametrowa. Pochodna exp w jedynce (macierzy identycznościowej) to identyczność, czyli w ten sposób dostaniemy wszystkie podgrupy jednoparametrowe w grupie macierzy.

Definicja: Odwzorowanie eksponencjalne z algebry Liego w grupę Liego definiujemy jako $\exp(X) = h_X(1)$, tzn. wartość dla $t = 1$ podgrupy z wektorem stycznym X.

Uwaga: $h_X(t) = \exp(tX)$. Mianowicie, $h_{sX}(t) = h_X(st)$ jako że przy ustalonym s obie strony są podgrupami jednoparametrowymi z tym samym wektorem stycznym w 0. Teraz

$$h_X(t) = h_{tX}(1) = \exp(tX).$$

Oczywiście exp jest odwzorowaniem gładkim. Mamy

$$\partial_t \exp(tX)|_{t=0} = \partial_t h_t X(1)|_{t=0} = \partial_t h_X(t)|_{t=0} = X$$

czyli pochodna exp w zerze to identyczność. Na mocy twierdzenia o funkcji odwrotnej oznacza to że exp jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia $0 \in \mathbf{g}$ z pewnym otoczeniem jedynki w G.

Jeśli h jest homomorfizmem z G w H, zaś Dh to pochodna h w jedynce, to mamy wzór

$$h(\exp(X)) = \exp(Dh(X)).$$

Mianowicie, podstawiając tX zamiast X widzimy że obie strony dają podgrupy jednoparametrowe z tym samym wektorem stycznym.

Lemat 0.2 *Jeśli G jest spójną grupą Liego z algebrą Liego $\mathbf{g}$, H jest grupą Liego z algebrą Liego $\mathbf{h}$, ϕ i ψ są gładkimi homomorfizmami z G w H takimi że $D\phi_e = D\psi_e$, to $\phi = \psi$.*

Komentarz: Mniej formalnie, homorfizm spójnych grup Liego jest jednoznacznie wyznaczony przez homomorfizm algebr Liego.

Dowód: Wybieramy ograniczone, symetryczne i wypukłe otoczenie zera V w $\mathbf{g}$ takie że exp jest dyfeomorfizmem na $2V$. Niech $U = \exp(V)$. Z wyboru V wynika że U jest otwarte. Jeśli $g = \exp(X)$, to $g^{-1} = \exp(-X)$ (tu jeszcze raz używamy fakt że $\exp(tX)$ jest podgrupą jednoparametrową). Jako że V jest symetryczny wynika stąd że $U^{-1} = U$. Teraz, dla $v \in V$ piszemy

$$\phi(\exp(v)) = \exp(D\phi_e v) = \exp(D\psi_e v) = \psi(\exp(v)).$$

Czyli dla $g \in U$ mamy $\phi(g) = \psi(g)$. Jako że ϕ i ψ są homorfizmami to równość $\phi(g_1) = \psi(g_1)$ i $\phi(g_2) = \psi(g_2)$ implikuje $\phi(g_1g_2) = \psi(g_1g_2)$. Czyli jeśli $\phi = \psi$ zarówno na zbiorze W jak i Y to $\phi = \psi$ na WY. To pozwala indukcyjnie pokazać że $\phi = \psi$ na U^k dla dowolnego naturalnego k. Niech

$$G_0 = \bigcup_{k>0} U^k.$$

Pokazaliśmy że $\phi = \psi$ na G_0. Ale G_0 jest zamknięte na mnożenie i branie elementu odrotnego (bo $U = U^{-1}$), czyli G_0 jest podgrupą G. Jako że U jest otwarte, to G_0 jest podzbiorem otwartym G. Jako że G jest spójna oznacza to że $G_0 = G$. Mianowicie, ogólnie G jest sumą warstw xG_0, $x \in G$ względem G_0. Dwie warstwy albo są rozłączne albo równe. Gdyby była więcej niż jedna warstwa dałoby to rozkład G na sumę rozłącznych zbiorów otwartych co jest niemożliwe bo G jest spójna. $\square$

Lemat 0.3 *Jeśli ciąg $g_n \in G$ zbiega do jedynki e to istnieje podciąg g_{n_k}, $X \in \mathbf{g}$ i stałe c_k takie że $g_{n_k}^{\lfloor c_k t\rfloor}$ zbiega do $\exp(tX)$ jednostajnie na zbiorach zwartych. Jeśli $g_n \neq e$ dla dużych n to X można wybrać różne od 0.*

Dowód: Przypadek gdy $g_n = e$ dla dużych n jest trywialny, stałe c_k i $X = 0$ da nam zbieżność do $e = \exp(tX)$. Dalej rozpatrujemy tylko przypadek gdy $g_n \neq e$ dla dużych n.

Wybieramy normę na algebre Liego $\mathbf{g}$ grupy G. Niech $V = \{x \in \mathbf{g} : |x| < r\}$ gdzie $|x|$ oznacza normę x. Dla dostatecznie małych r exp jest dyfeomorfizmem z $2V$ w G. Dla dostatecnie dużych n mamy $g_n \in \exp(V)$. Niech $b_n = \exp^{-1}(g_n) \in \mathbf{g}$. Następnie, niech $d_n = \frac{1}{|b_n|}$ i $w_n = d_n b_n$. b_n, d_n i w_n są dobrze zdefiniowane dla dostatecznie dużych n. Jako że $|w_n| = 1$ to można wybrać n_k takie że w_{n_k} jest zbieżne do pewnego X. Mamy

$$|X| = \lim |w_{n_k}| = 1$$

czyli $X \neq 0$. Bierzemy $c_k = d_{n_k}$. Teraz

$$c_k t b_{nk} = t w_{n_k} \to tX$$

jednostajnie dla t ze zbiorów zwartych.

Mamy $|c_k t - \lfloor c_k t\rfloor| < 1$, czyli

$$(\lfloor c_k t\rfloor - c_k t) b_{n_k} \to 0$$

jednostajnie (bo $b_n \to 0$). Czyli

$$\lfloor c_k t \rfloor b_{n_k} = (\lfloor c_k t \rfloor - c_k t) b_{n_k} + c_k t b_{nk} \to tX$$

jednostajnie dla t ze zbiorów zwartych. Z ciągłości exp

$$\exp(\lfloor c_k t \rfloor b_{n_k}) \to \exp(tX)$$

jednostajnie dla t ze zbiorów zwartych. Dalej

$$g_{n_k}^{\lfloor c_k t \rfloor} = \exp(\lfloor c_k t \rfloor b_{n_k})$$

czyli również

$$g_{n_k}^{\lfloor c_k t \rfloor} \to \exp(tX)$$

jednostajnie dla t ze zbiorów zwartych. □

Lemat 0.4 *Ciągła podgrupa jednoparametrowa grupy Liego jest gładka.*

Dowód: Niech h bedzie ciągłą podgrupą jednoparametrową grupu Liego G z algebrą Liego $\mathbf{g}$. Jeśli h jest stała to jest gładka, więc wytarczy rozpatrywać niestałe h. Jeśli $h(t_1) = h(t_2)$ to $h(t_1 - t_2) = e$. Skoro h jest niestała to istnieje T_0 takie że dla $|t| \leq T_0$, $t \neq 0$ mamy $h(t) \neq e$. Wtedy h jest różnowartościowe na $[-T_0/2, T_0/2]$.

Niech $V \subset \mathbf{g}$ będzie ustalonym wypukłym otoczeniem 0 takim że exp jest dyfeomorfizmem z $2V$ w G. Niech $U = \exp(V)$. Zmniejszając V jeśli trzeba można zakładać że $h(T_0/2) \notin U$.

Na mocy ciągłości h istnieje $\epsilon > 0$ takie że $h([-\epsilon, \epsilon]) \subset U$. Niech $g_n = h(\frac{1}{n})$. Jako że $\frac{1}{n} \to 0_+$, to na mocy ciągłości h mamy $g_n \to e$. Ponadto $g_n \neq e$.

Na mocy lematu 0.3 istnieje $X \neq 0$, ciąg n_k i stałe c_k takie że

$$g_{n_k}^{\lfloor c_k t \rfloor} = h(\frac{1}{n} \lfloor c_k t \rfloor) \to \exp(tX)$$

jednostajnie dla t ze zbiorów zwartych. Jako że $|c_k t - \lfloor c_k t \rfloor| < 1$, to

$$\frac{1}{n}(c_k t - \lfloor c_k t \rfloor) \to 0$$

jednostajnie względem t. Czyli, z ciągłości h

$$h(\frac{1}{n}(c_k t - \lfloor c_k t \rfloor)) \to e$$

jednostajnie względem t. Jako że

$$h(\frac{1}{n} c_k t) = h(\frac{1}{n} [c_k t]) h(\frac{1}{n}(c_k t - \lfloor c_k t \rfloor))$$

to mamy też

$$h(\frac{1}{n} c_k t) \to \exp(tX)$$

jednostajnie dla t ze zbiorów zwartych.

Wybieramy $T_1 > 0$ takie że $\exp([-T_1, T_1]X) \subset U$. Na mocy jednostajnej zbieżności dla dostatecznie dużych k mamy

$$h(\frac{1}{n}c_k[-T_1, T_1]) \subset U.$$

Oznacza to że $\frac{1}{n}c_k T_1 < T_0/2$. Mianowicie, w przeciwnym przypadku $T_0/2 \in \frac{1}{n}c_k[-T_1, T_1]$, czyli $h(T_0/2) \in U$, co przeczy wyborowi U. A więc dla $t \in [-T_1, T_1]$ liczby $\frac{1}{n}c_k$ są wspólnie ograniczone, więc można z nich wybrać podciąg zbieżny do pewnego s. Wtedy

$$h(st) = \exp(tX)$$

dla $t \in [-T_1, T_1]$. To oznacza że $h(t) = \exp(tX/s)$, czyli h jest gładkie. $\square$