Lemat 0.1 *Ciągły homomorfizm h grupy Liego G w grupę Liego H jest gładki.*

Dowód: Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie bazą algebry Lego $\mathbf{g}$ grupy G. Wtedy $\gamma_i(t) = h(\exp(tX_i))$ zadaje ciągłą podgrupę jednoparametrową w H. Na mocy poprzedniego lematu γ_i jest gładka. Rozważmy odwzorowanie ϕ z $\mathbb{R}^n$ w G zadane wzorem

$$\phi((t_1, \ldots, t_n)) = \exp(t_1 X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(t_n X_n).$$

Pochodna ϕ w 0 jest odwracalna (bo X_i są bazą), więc ϕ jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia $0 \in \mathbb{R}^n$ na otoczenie jedynki U w G. h jest homomorfizmem, więc

$$h(\exp(t_1 X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(t_n X_n)) = \gamma_1(t_1) \cdot \ldots \cdot \gamma_n(t_n).$$

Jako że γ_i jest gładka, prawa strona jest gładka. A więc na U homomorfizm h jest gładki, czyli ze względu na grupową niezmienniczość struktur różniczkowych na G i H homomorfizm h jest gładki w otoczeniu dowolnego punktu, czyli gładki wszędzie. □

Definicja Podgrupę H grupy Liego G nazywamy podgrupą Liego jeśli H ma strukturę grupy Liego i włożenie identycznościowe H w G jest gładkie.

Uwaga: Ta definicja dopuszcza różne dziwne zachowania.

Przykłady:

1. Zbiór punktów postaci $\{(0,t) : t \in \mathbb{R}\}$ jest izomorficzny z prostą rzeczywistą i jest podgrupą Liego płaszczyzny.

2. Niech G_d to będzie G z topologią dyskretną i strukturą rozmaitości wymiaru 0. Wtedy G_d jest podgrupą Liego G.

3. $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ jest podgrupą Liego $\mathbb{R}^2$.

4. Niech a będzie liczbą niewymierną. Niech $H = \{(t, at) : t \in \mathbb{R}\}$. H jest podgrupą Liego $\mathbb{R}^2$. Niech $G = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Obraz H przez odwzorowanie ilorazowe jest gęstą podgrupą Liego w G.

5. Niech $G = SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2$ będzie produktem półprostym $SL(2,\mathbb{Z})$ z $\mathbb{R}^2$ gdzie działanie $SL(2,\mathbb{Z})$ na $\mathbb{R}^2$ jest naturalne. Jako rozmaitość G jest dyfeomorficzne z produktem kartezjańskim $SL(2,\mathbb{Z})$ i $\mathbb{R}^2$. Na G wprowadzamy teraz topologię i strukturę różniczkową produktu $SL(2,\mathbb{Z})$ i $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$. To daje nam podrozmaitość G (w sensie włożenia) która jako zbiór jest identyczna z G, czyli jest podgrupą. Ale łatwo sprawdzić że przy tej nowej topologii działania grupowe są nieciągłe, czyli nie jest to podgrupa Liego.

Uwaga: Na mocy lematu z wykładu 1 algebra Liego podgrupy Liego H jest podalgebrą algebry Liego G.

Lemat 0.2 *Jeśli N jest podrozmaitością (w sensie włożenia) rozmaitości M, H jest rozmaitością, f jest funkcją ciągłą z H w N taką że $\iota \circ f$ jest gładkie, gdzie ι oznacza włożenie N w M, to f jest gładka.*

Dowód: To jest wniosek z twierdzenia o rzędzie. Niech $x \in H$, $y = f(x) \in N$. Naturalne włożenie ι z N w M ma stały rząd, więc na mocy twierdzenia o rzędzie ustnieją otwarte $U \subset N$ i $V \subset M$, $U \subset V$, $y \in U$ takie że w odpowiednim układzie współrzędnych włożenie ι kopiuje współrzędne z U pozostałe pozycje uzupełniając zerami. Jako że f jest ciągła to istnieje otwarte $W \subset H$, $x \in W$,

$f(W) \subset U$. Teraz widać że f obcięte do W jest gładkie (bo na W $iota \circ f$ różni się od f tylko dodatokowymi zerowymi składowymi). Jako że x był dowolny oznacza to że f jest gładkie. $\square$

Lemat 0.3 *Jeśli H jest podgrupą i podrozmaitością G i operacje grupowe są ciągłe w topologi H, to H jest podgrupą Liego.*

Dowód: Niech ι oznacza włożenie identycznościowe H w G, m oznacza mnożenie w H zaś $\tilde{m}$ mnożenie w G. Mamy

$$\iota \circ m = \tilde{m} \circ (\iota \times \iota)$$

Jako że ι i $\tilde{m}$ są gładkie to prawa strona jest gładka. Czyli $\iota \circ m$ jest gładkie. Z założenia m jest ciągłe, więc na mocy lematu 0.2 jest gładkie. Podobnie pokazujemy że branie elementu odwrotnego jest gładkie. A więc H ma strukturę grupy Liego. Jako że ι jest gładkie to H jest podgrupą Liego. $\square$

Definicja. Automorfizm wewnętrzny A_x, odwzorowanie Ad i ad to

$$A_x(y) = xyx^{-1},$$

$$\mathrm{Ad}_x = D_y A_x(y)|_{y=e},$$

$$\mathrm{ad}_X = (D_x \mathrm{Ad}_x)|_{x=e}(X).$$

Lemat 0.4 *Mamy*

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y],$$

$$\mathrm{Ad}_{\exp(X)} = \exp(\mathrm{ad}_X),$$

$$A_{\exp(X)}(\exp(Y)) = \exp(\exp(\mathrm{ad}_X)Y).$$

Dowód: Wprowadzamy pomocnicze operatory E_X wzorem

$$(E_X f)(g) = f(\exp(X)g).$$

Mamy

$$\partial_t E_{tX}|_{t=0} = X.$$

Rozpisując definicje

$$f(A_{\exp(X)}(\exp(Y)g) = (E_X E_Y E_{-X} f)(g).$$

Czyli

$$(\mathrm{Ad}_X(Y))f = \partial_s E_X E_{sY} E_{-X} f|_{s=0} = E_X Y E_{-X} f,$$

$$\mathrm{ad}_X(Y)f = \partial_t \mathrm{Ad}_{tX}(Y))f|_{t=0} = \partial_t E_{tX} Y E_{-tX} f|_{t=0} = XYf - YXf = [X, Y]f.$$

To daje pierwszy wzór. $\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}$ i $\exp(\mathrm{ad}_{tX})$ to podgrupy jednoparametrowe w grupie endomorfizmów $\mathbf{g}$ z tym samym wektorem stycznym ad_X dla $t = 0$, czyli są równe co daje środkowy wzór. Wreszcie $A_{\exp(X)}(\exp(tY))$ i $\exp(\exp(\mathrm{ad}_X)tY)$ to podgrupy jednoparametrowe G z tym samym wektorem stycznym $\exp(\mathrm{ad}_X)Y$ dla $t = 0$, co daje trzeci wzór. $\square$