**Definicja**. Powiemy że algebra Liego $\mathbf{g}$ jest przemienna gdy nawias Liego jest tożsamościowo równy 0, tzn.

$$\forall_{X,Y\in\mathbf{g}}[X,Y]=0.$$

**Definicja**. Powiemy że podalgebra $\mathbf{h}$ algebra Liego $\mathbf{g}$ jest ideałem wtedy i tylko wtedy gdy $[\mathbf{g},\mathbf{h}]\subset\mathbf{h}$.

Uwaga: Na mocy lematu z wykładu 1 algebra Liego podgrupy Liego $H$ jest podalgebrą algebry Liego $G$.

**Lemat 0.1** *Spójna grupa Liego jest przemienna wtedy i tylko wtedy gdy jej algebra Liego* $\mathbf{g}$ *jest przemienna.*

*Dowód*: Na mocy lematu mamy

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(-X)=A_{\exp(X)}(\exp(Y))=\exp(\exp(\mathrm{ad}_X)Y)$$

Jeśli $\mathbf{g}$ jest przemienna to $\mathrm{ad}_X=0$, czyli $\exp(\mathrm{ad}_X)Y=Y$, czyli

$$A_{\exp(X)}(\exp(Y))=\exp(Y).$$

Jako że obraz exp zawiera otoczenie jedynki $U$ takie że $U^{-1}=U$, to mamy

$$A_{\exp(X)}(y)=y$$

dla $y\in U$. Jako że $A_{\exp(X)}$ jest automorfizmem powyższa równość indukcyjnie przedłuża się na $U^k$. Jak już wcześniej zauważyliśmy, skoro $G$ jest spójna, to

$$G=\bigcup_k U^k$$

czyli mamy

$$A_{\exp(X)}(y)=y$$

dla wszystkich $y\in G$. Podobnie, powyższe oznacza że równość

$$A_x(y)=y$$

zachodzi dla dowolnego $y\in G$ i $x\in U$. Jako że przyporządkowanie $x\mapsto A_x$ jest homomorfizmem powyższa równość przedłuża się dla $x\in U^k$, czyli dla dowolnych $x,y\in G$ mamy

$$A_x(y)=y.$$

Lecz $A_x(y)=xyx^{-1}$, czyli

$$xyx^{-1}=y$$

czyli

$$xy=yx$$

co oznacza że grupa jest przemienna.

Jeśli grupa jest przemienna to prowadząc rozumowanie w przeciwną stronę widzimy że

$$\exp(\mathrm{ad}_X)Y=Y$$

dla dowolnych $X,Y\in\mathbf{g}$ co oznacza że

$$\mathrm{ad}_X(Y)=\partial_t\exp(\mathrm{ad}_{tX})Y=0$$

czyli
$$0 = \mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$$
czyli algebra Liego $\mathbf{g}$ jest przemienna. $\square$

**Lemat 0.2** *Niech $G$ będzie grupą Liego z algebrą Liego $\mathbf{g}$ zaś $H$ jej podgrupą Liego z podalgebrą $\mathbf{h}$. Jeśli $G$ i $H$ są spójne zaś $\mathbf{h}$ jest ideałem $\mathbf{g}$ to $H$ jest podgrupą normalną. Jeśli $H$ jest podgrupą normalną i automorfizmy wewnętrzne $G$ są ciągłe na $H$ w topologii $H$ to $\mathbf{h}$ jest ideałem $\mathbf{g}$.*

*Dowód*: Jak w poprzednim lemacie używamy wzór
$$\exp(X)\exp(Y)\exp(-X) = A_{\exp(X)}(\exp(Y)) = \exp(\exp(\mathrm{ad}_X)Y)$$
Jeśli $\mathbf{h}$ jest ideałem w $\mathbf{g}$ to dla $X \in \mathbf{g}$, $Y \in \mathbf{h}$ mamy $\mathrm{ad}_X(Y) \in \mathbf{h}$, czyli
$$\exp(\mathrm{ad}_X)Y \in \mathbf{h}$$
czyli
$$\exp(\exp(\mathrm{ad}_X)Y) \in H.$$
A więc istnieje otoczenie jedynki $U$ w $H$ takie że dla $y \in U$ mamy
$$A_{\exp(X)}(y) \in H.$$
Znowu, ta własność przechodzi na $y \in U^k$, i ze względu na spójność $H$ na $y \in H$. Czyli
$$A_{\exp(X)}(H) \subset H.$$
A więc istnieje otoczenie jedynki $V$ w $G$ takie że dla $x \in V$ mamy
$$A_x(H) \subset H.$$
Ponownie używając spójność $G$ ta równość rozszerza sie do $x \in G$, czyli dla dowolnego $x \in G$ mamy
$$xHx^{-1} \subset H.$$
Ale to oznacza że $H$ jest podgrupą normalną w $G$.

Jeśli $H$ jest normalną podgrupą Liego $G$, to $A_{\exp(X)}$ daje automorfizm $H$. Z założania jest on ciągły, czyli gładki. A więc pochodna $A_{\exp(X)}$ w jedynce odwzorowuje $\mathbf{h}$ w $\mathbf{h}$. Czyli
$$\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}\mathbf{h} \subset \mathbf{h}.$$
Różniczkując względem $t$ widzimy że dla $Y \in \mathbf{h}$
$$\mathrm{ad}_X(Y) = \partial_t \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y)|_{t=0} \in \mathbf{h}.$$
Czyli dla $X \in \mathbf{g}$, $Y \in \mathbf{h}$
$$[X, Y] \in \mathbf{h}$$
co oznacza że $\mathbf{h}$ jest ideałem. $\square$

Komentarz: Powyżej założenie że automorfizmy wewnętrzne są ciągłe jest automatycznie spełnione. Mianowice, $H$ jest przeliczalną sumą zbiorów zwartych, czyli jest podzbiorem borelowskim $G$. To powoduje że automorfizmy wewnętrzne obcięte do $H$ są borelowsko mierzalne. Dla homomorfizmu grup polskich (a $H$ jest grupą polską), borelowska mierzalność implikuje ciągłość. Jednakże to rozumowanie używa dość zaawansowany materiał którego nie omawiamy na tym wykładzie, dlatego założenie ciągłości jest potrzebne by podać kompletny, prosty dowód.

**Lemat 0.3** *Jeśli $G$ jest grupą Liego, $x, y \in \mathbf{g}$, gdzie $\mathbf{g}$ jest algebrą Liego grupy $G$ to*

$$\exp(x+y) = \lim_{n\to\infty} (\exp(x/n)\exp(y/n)^n$$

*Dowód*: Używając $\exp^{-1}$ jako mapę w otoczeniu jedynki z definicji exp mamy

$$\exp^{-1}(\exp(x/n)) = x/n.$$

Jako że mnożenie jest gładkie oraz $xe = ex = x$ to pochodna cząstkowa mnożenia względem pierwszego (lub drugiego) argumentu jest identycznością. A więc z wzoru Taylora

$$\exp^{-1}(\exp(x/n)\exp(y/n)) = x/n + y/n + o(1/n)$$

czyli

$$n\exp^{-1}(\exp(x/n)\exp(y/n)) \to x + y$$

a więc ten lemat wynika z lematu o zbieżności do podgrup jednoparametrowych. □

**Lemat 0.4** *Domknięta podgrupa $H$ grupy Liego $G$ jest podgrupą Liego*

*Dowód*: Niech $V$ bedzie zbiorem takich $x \in \mathbf{g}$ że $\exp(\mathbb{R}x) \subset H$. Na mocy poprzedniego lematu $V$ jest podprzestrznią. Niech $W$ będzie podprzestrzenią dopełniczą do $V$ w $\mathbf{g}$. Wtedy $(w, v) \mapsto \exp(w)\exp(v)$ jest dyfeomorfizmem produktowego otoczenia 0 w $W \times V$ z otoczeniem jedynki $U$ w $G$.

Twierdzimy że $\exp(V) \cap U$ jest otoczeniem $e$ w $H$. Mianowicie w przeciwnym razie istniałby ciąg $h_n \in H$ zbieżny do $e$ taki że $h_n \notin \exp(V) \cap U$. $h_n = w_n v_n$ gdzie $v_n \in \exp(V) \cap U$ i $w_n \in \exp(W) \cap U$. Oczywiście $w_n = \exp(u_n) \in H$ i $u_n$ dąży do 0. Piszemy $u_n = t_n z_n$ gdzie $t_n = |u_n|$, zaś $|z_n| = 1$. Z ciągu $z_n$ można wybrać podciąg zbieżny, więc $\exp(sz_n) \in H$, co przeczy maksymalności $V$. To oznacza że jeśli zadamy $l_x$ wzorem $l_x(v) = \exp(v)x$ to $l_x$ jest homeomorfizmem na otocznie $Ux \cap H$ $x$ w $H$. Teraz niech $\phi_x$ będzie odwrotnością $l_x$. Łatwo sprawdzić że $\phi_x$ są zgodne. Mianowicie, jeśli dziedzina $\phi_e$ i dziedzina $\phi_x$ się przecinają, to przekrój $F \subset U$. Na $E = \phi_e(F)$ mamy $\phi_x \phi_e^{-1} = \exp^{-1} x^{-1} \exp$ co jest gładkie. Ogólny przypadek przez przesunięcia sprowadza się do powyższego. A więc $H$ (z topologią indukowaną) jest podrozmaitością, a więc również podgrupą Liego. □