Definicja. Niech P będzie przestrznią topologiczną. Powiemy że para (π, Q) jest nakryciem P jeśli $\pi : Q \to P$ jest ciągle i dla każdego $x \in P$ istnieje otoczenie U takie że $\pi^{-1}(U)$ jest sumą rozłącznych zbiorów otwartych V_y i dla każdego y π obcięte do V_y jest homeomorfizmem V_y z U. π powyżej nazywamy odwzorowaniem nakrywającym.

Definicja. Niech P i Q będą przestrzeniami topologicznymi, zaś A domkniętym podzbiorem P. Powiemy że funkcje ciągłe f i g z P w Q takie że $f|_A = g|_A$ są homotopijne względem A jeśli istnieje funkcja ciągła h z $P \times [0,1]$ w Q taka że $f(x) = h(x,0)$, $g(x) = h(x,1)$ i $f(x) = g(x) = h(x,t)$ dla $x \in A$.

Uwaga: Homotopia względem ustalonego A jest relacją równoważności.

Definicja. Grupą podstawową $\pi_1(P, x_0)$ przestrzeni topologicznej P względem punktu $x_0 \in P$ nazywamy zbiór klas równoważności krzywych ciągłych $\gamma : [0,1] \to P$ takich że $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ względem homotopi względem $\{0,1\}$. Na klasach równoważności krzywych wprowadzamy mnożenie wzorem $[\gamma_1][\gamma_2] = [\eta]$ gdzie $\eta(t) = \gamma_1(2t)$ dla $t \in [0,1/2]$ i $\eta(t) = \gamma_2(2t-1)$ dla $t \in [1/2,1]$. Element neutralny to klasa krzywej stałej $\gamma(t) = x_0$, element odwrotny to klasa krzywej η z odwrotną parametryzacją: $\eta(t) = \gamma(1-t)$.

Jeśli P jest łukowo spójna to $\pi_1(P, x_0)$ dla różnych x_0 są izomorficzne. W takiej sytuacji często pisze się $\pi_1(P)$ i używa nazwy grupa podstawowa.

Definicja. Mówimy że łukowo spójna przestrzeń topologiczna P jest jednospójna jeśli jej grupa podstawowa jest trywialna. Równoważnie, P jest jednospójna wtedy i tylko wtedy gdy każda pętla w P (tzn. krzywa $\gamma : [0,1] \to P$ taka że $\gamma(0) = \gamma(1)$) jest homotopijna ze stałą.

Lemat 0.1 *Jeśli P jest przestrzenią z wyróżnionym punktem e i ciągłą operacją $m : P \times P \to P$ taką że $m(e,x) = m(x,e) = x$, to grupa podstawowa P jest przemienna. W szczególności grupa podstawowa łukowo spójnej grupy topologicznej jest przemienna.*

Definicja. Powiemy że przestrzeń P jest półlokalnie jednospójna jeśli dla każdego punktu $x \in$ istnieje otoczenie V takie że każda krzywa γ taka że $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ której obraz jest zawarty w U jest homotopijna względem $\{0,1\}$ z krzywą stałą.

Lemat 0.2 *Jeśli P jest lokalnie łukowo spójna, spójna i półlokalnie jednospójna to P ma nakrycie jednospójne. W szczególności spójna rozmaitość ma nakrycie jednospójne.*

Lemat 0.3 *Jeśli P jest lokalnie łukowo spójna, spójna i jednospójna, $x_0 \in P$, f jest ciągłym odwzorowaniem z P w Q, $\pi : R \to Q$ jest nakryciem zaś $\pi(y_0) = f(x_0)$ to istnieje dokładnie jedno ciągłe h takie że $\pi \circ h = f$ i $h(x_0) = y_0$.*

Uwaga: odwzorowanie h z lematu nazywamy podniesieniem odwzorowania f.

Uwaga: lemat oznacza że nakrycie jednospójne przestrzeni spójnej i lokalnie łukowo spójnej o ile istnieje to jest jednoznacznie wyznaczone z dokładnością do homeomorfizmu.

Lemat 0.4 *Produkt kartezjański przestrzeni jednospójnych jest jednospójny. Produkt kartezjański nakryć jest nakryciem.*

Lemat 0.5 *Nakrycie $\pi : P \to Q$ rozmaitości gładkiej (analitycznej) Q ma naturalną strukturę rozmaitości gładkiej (analitycznej) taką że dla dowolnej rozmaitości gładkiej (analitycznej) M ciągłe $f : M \to P$ jest gładkie (analityczne) wtedy i tylko wtedy gdy $\pi \circ f$ jest gładkie (analityczne).*

Lemat 0.6 *Jeśli G jest spójną i łukowo spójną grupą topologiczną zaś $\pi : H \to G$ jest nakryciem jednospójnym G, to H ma jedyną strukturę grupy topologicznej taką że odwzorowanie nakrywające π jest homomorfizmem grup. Jądro π jest izomorficzne z grupą podstawową G.*

Dowód: Niech $m : G \times G \to G$ oznacza mnożenie w G. $P \times P$ jest jednospójne zaś $\pi \times \pi$ jest odwzorowaniem nakrywającym z $P \times P$ w $G \times G$. Mnożenie $\tilde{m}$ w P istnieje i jest jednoznaczne na mocy Lematu 0.3 jako podniesienie odwzorowania $f = m \circ (\pi \times \pi)$. Łączność $\tilde{m}$ również wynika z Lematu 0.3. Mianowicie, $\tilde{m}(x, \tilde{m}(y, z))$ i $\tilde{m}(\tilde{m}(x, y), z)$ dają dwa podniesinia tego samego odwzorowania $m(x, m(y, z)) \circ (\pi \times \pi \times \pi)$, więc z jednoznaczności podnoszenia są równe. Podobnie pokazujemy istnienie elementu odwrotnego. $\square$

Lemat 0.7 *Nakrycie jednospójne H spójnej grupy Liego G jest grupą Liego.*

Dowód. Na mocy poprzedniego lematu H ma naturalną strukturę grupy topologicznej. Na mocy Lematu 0.5 H ma strukturę rozmaitości i operacje grupowe są gładkie. $\square$

Lemat 0.8 *(twierdzenie Frobeniusa) Niech M będzie rozmaitością gładką zaś A rodziną gładkich pól wektorowych na M taką że A jest zamknięta na dodawanie i mnożenie prze funkcje gładkie (czyli jest modułem nad $C^\infty(M)$), A jest zamknięta na komutator pól wektorowych (czyli jest algebrą Liego). Dla $x \in M$ niech A_x oznacza podprzetrzeń TM_x rozpinaną przez wartości pól z A w punkcie x. Zakładamy że wymiar A_x nie zależy od x. Ustalmy $y \in M$. Istnieje dokładnie jedna podrozmaitość $N \subset M$ taka że N jest spójna, $y \in N$, dla $x \in N$ mamy $TN_x = A_x$ i M jest maksymalna między rozmaitościami spełniającymi trzy poprzednie warunki.*

Lemat 0.9 *Niech G będzie grupą Liego z algebrą Liego* $\mathbf{g}$ *i niech* $\mathbf{h}$ *będzie podalgebrą Liego* $\mathbf{g}$. *Wtedy istnieje jednoznaczna spójna podgrupa Liego H której algebrą Liego jest* $\mathbf{h}$.

Dowód: Niech B będzie modułem nad $C^\infty(G)$ rozpinanym przez $\mathbf{h}$. Ze wzoru

$$[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y$$

wynika że B jest zamknięte na komutator i $\dim(B_x) = \dim(\mathbf{h})$. Ponadto $B_x = \mathrm{lin}\{X_i(x)\}$ jeśli $\{X_i\}$ są bazą $\mathbf{h}$. A więc spełnione są założenia twierdzenia Frobeniusa, czyli istnieje dokładnie jedna maksymalna spójna podrozmaitość H taka że $e \in H$, $TH_x = B_x$ dla $x \in H$. Dla $x \in H$ rozważmy teraz Hx. Jako że pola z $\mathbf{h}$ są prawostronnie niezmiennicze mamy $T(Hx)_z = B_z$ dla $z \in Hx$. Ponadto $x \in Hx$ i Hx jest spójna. Jako prawe przesunięcie H Hx jest maksymalna z tymi własnościami. Ale H ma też te własności, czyli $H \subset Hx$. teraz widzimy że $e \in Hx$, z maksymalności H mamy $Hx \subset H$, czyli $Hx = H$. A więc H jest zamknięte na mnożenie. Jako że pola z $\mathbf{h}$ są styczne do H to $\exp(\mathbf{h}) \subset H$. Ponadto exp jest dyfeomorfizmem na otoczenie jedynki w H. Jako że $\exp(-X)$ jest odwrotnością $\exp(X)$ oznacza to że elementy pewnego otoczenia U jedynki w H są odwracalne. Teraz widać że

$$\bigcup_k U^k$$

jest otwartą podgrupą H i jako że H jest spójne musi być równe H. Czyli H jest podgrupą G. Aby pokazać że operacje grupowe w H są ciągłe zauważmy najpierw że automorfizmy wewnętrzne H są ciągłe w jedynce. Dokładniej, jeśli x jest ustalonym elementem H to definujemy

$$A_x(y) = xyx^{-1}.$$

Niech U będzie otoczeniem e w H. Istnieje otoczenie zera $V \subset \mathbf{h}$ takie że $\exp(V) \subset U$. Dalej istnieje otoczenie zera W w $\mathbf{g}$ takie że $W \cap \mathbf{h} \subset V$ i exp jest dyfeomorfizmem W na otoczenie jedynki X w G. Jako że operacje grupowe w G są ciągłe to A_x jako odwzorowanie z G w G jest ciągłe. A więc istnieje otoczenie Y zera w $\mathbf{g}$ takie że $\exp^{-1}(A_x(\exp(Y)) \subset W$. Niech $Z = Y \cap V$. Jako że A_x przekształca podgrupy jednoparametrowe na podgrupy jednoparametrowe, to $A_x(\exp(\mathbf{h})) \subset \exp(\mathbf{h})$, czyli $A_x(\exp(Z)) \subset \exp(\mathbf{h})$. Razem z własnościami Y daje to $A_x(\exp(Z)) \subset \exp(\mathbf{h}) \cap \exp(W)$. Jako że exp jest różnowartościowe na W mamy $A_x(\exp(Z)) \subset \exp(W \cap \mathbf{h})$. Lecz $W \cap \mathbf{h} \subset V$, czyli

$$A_x(\exp(Z)) \subset \exp(V) \subset U.$$

$\exp(Z)$ jest otoczeniem jedynki w H zaś U było dowolnym otoczeniem jedynki w H, więc A_x jest ciągłe w jedynce H. Podobnie, lecz łatwiej pokazujemy że mnożenie i branie elementu odwrotnego jest ciągłe w jedynce H. Teraz niech $x, y \in H$ będą dowolne. Z konstrukcji H struktura różniczkowa i topologia H jest niezmiennicza na prawe przesuniecia. Czyli dowolne otoczenie xy można zapisać w postaci Uxy gdzie U jest otoczeniem jedynki w H. Z pokazanej ciągłości w jedynce istnieją otoczenia jedynki V i W w H takie że $VW \subset U$. Teraz piszemy

$$VWxy = Vx(x^{-1}Wx)y$$

Z ciągłości automorfizmów wewnętrzych w jedynce H istnieje otoczenie jedynki X takie że $X \subset x^{-1}Wx$. A więc

$$VxXy \subset Vx(x^{-1}Wx)y = VWxy \subset Uxy.$$

Czyli dla dowolnego otoczenia xy (które zapisaliśmy jako Uxy), znaleźliśmy otoczenie Vx elementu x i otoczenie Xy elementu y takie że

$$VxXy \subset Uxy.$$

Ale to jest ciągłość mnożenia w xy. Podobnie pokazujemy ciągłość odwrotności. Skoro operacje grupowe w H są ciągłe to H jest podgrupą Liego. $\square$

Lemat 0.10 *Zakładamy że grupa Liego G z algebrą Liego $\mathbf{g}$ jest spójna i jednospójna. Jeśli f jest homorfizmem algebr Liego z $\mathbf{g}$ w algebrę Liego $\mathbf{h}$ grupy Liego H to istnieje dokładnie jeden gładki homomorfizm F z G w H taki że $DF(x)|_{x=e} = f$.*

Dowód: Niech $S = G \times H$. S jest grupą Liego z algebrą Liego $\mathbf{g} \oplus \mathbf{h}$. Niech

$$\mathbf{p} = \{(x, f(x)) : x \in \mathbf{g}\}.$$

Jako że f jest homorfizmem algebr Liego to $\mathbf{p}$ jest podalgebrą w $\mathbf{g} \oplus \mathbf{h}$. Na mocy Lematu 0.9 istnieje podgrupa Liego $P \subset S$ z algebrą Liego $\mathbf{p}$. Rozważmy rzutowanie π_1 z P na G. Pochodna π_1 w jedynce jest różnowartościowa, więc π_1 jest lokalnym dyfeomorfizmem. Jako że π_1 jest homomorfizmem wynika stąd że obraz π_1 jest otwarty. Jako że G jest spójna wynika stąd że π_1 jest na. Jako że π_1 jest lokalnym dyfeomorfizmem to jądo π_1 jest dyskretne. Wynika stąd że π_1 jest nakryciem. Jako że G jest jednospójna, identyczność na G można podnieść do ciągłego odwzorowania z G w P, czyli π_1 jest izomorfizmem grup topologicznych, czyli π_1 ma gładką odwrotność π_1^{-1}. Niech π_2 oznacza rzutowanie z P na H. Bierzemy

$$F = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}.$$

Jest to gładki homomorfizm grup Liego. Widać że $D\pi_1^{-1}(y)|_{y=e}$ spełnia

$$D\pi_1^{-1})(y)|_{y=e}(x) = (x, f(x))$$

czyli $DF(y)|_{y=e} = f$ □

Zakładamy że G i H są podgrupami jednej grupy. Niech

$$(G, H) = \text{grupa generowana przez } xyx^{-1}y^{-1} \text{ dla } x \in G,\ y \in H$$

oznacza komutant grup G i H. Piszemy

$$G^0 = G,$$

$$G^{k+1} = (G^k, G^k).$$

Powiemy że grupa G jest rozwiązalna jeśli istnieje k takie że $G^k = \{e\}$.

Zakładamy że $\mathbf{g}$ i $\mathbf{h}$ są podalgebrami tej samej algebry Liego. Niech

$$[\mathbf{g}, \mathbf{h}] = \text{podalgebra generowana przez } [x, y],\ x \in \mathbf{g},\ y \in \mathbf{h}$$

oznacza komutant algebr $\mathbf{g}$ i $\mathbf{h}$. Piszemy

$$\mathbf{g}^0 = \mathbf{g},$$

$$\mathbf{g}^{k+1} = [\mathbf{g}^k, \mathbf{g}^k].$$

Powiemy że algebra $\mathbf{g}$ jest rozwiązalna jeśli istnieje k takie że $\mathbf{g}^k = \{0\}$.

Podobnie piszemy

$$G_0 = G,$$

$$G_{k+1} = (G, G_k).$$

Powiemy że grupa G jest nilpotentna jeśli istnieje k takie że $G_k = \{e\}$. Piszemy też

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{g},$$

$$\mathbf{g}_{k+1} = [\mathbf{g}, \mathbf{g}_k].$$

Powiemy że algebra $\mathbf{g}$ jest nilpotentna jeśli istnieje k takie że $\mathbf{g}_k = \{0\}$.

Przykład: grupa Heisenberga z pierwszego wykładu jest nilpotentna, grupa "ax + b" jest rozwiązalna.

Dodatek: Dowód twierdzenia Frobeniusa.

Dowód: Najpierw indukcyjnie względem wymiaru A_x pokazujemy istnienie rozmaitości spełniającej $y \in N$ i $TN_x = A_x$ dla $x \in N$. Jest to wynik lokalny więc można pracować w jednej mapie czyli na $\mathbb{R}^n$. Jeśli $\dim(A_x) = 0$ to mamy $N = \{y\}$. Jeśli $\dim(A_) = k+1$, $k \geq 0$ to wybieramy pole $X \in A$ takie że $X(y) \neq 0$. Na mocy twierdzenia o prostowaniu pola wektorowego lokalnie w otoczeniu y można przyjąc że $X = \partial_1$. Odejmując od pozostałych pól opowiednią wielokrotność X można przyjąć że A jest generowane przez X i pola postaci

$$\sum_{i=2}^{n} f_i \partial_i.$$

Bez utraty ogólności można wybrać współrzędne i pola Y_i tak by $Y_i(y) = \partial_{i+1}$ dla $i = 1, \ldots, k$. Niech

$$V = \mathrm{lin}\{\partial_i : i = 2, \ldots, k+1\}$$

Dla $x \in M$ rozważmy odwzorowanie $B_x : \mathbb{R}^k \to V$ zadane wzorem

$$B_x(t_1, \ldots, t_k) = \pi_V((t_1 Y_1 + \ldots t_k Y_k)(x)).$$

$\{\partial_i : i = 2, \ldots, k+1\}$ jest bazą V co pozwala utożsamiać V z $\mathbb{R}^k$ Dla $x = y$ przy tym utożsamieniu odwzorowanie B_x jest identycznością. A więc w pewnym otoczeniu y odwzorowanie B_x ma odwrotność B_x^{-1}. Mnożąc wektor $(Y_2, \ldots, Y_{k+1})$ przez B_x^{-1} otrzymany nowe pola wektorowe Z_i należące do A takie że w otoczeniu y mamy

$$Z_i(x) = \partial_{i+1} + \sum_{j=k+2}^{n} g_j \partial_j.$$

Komutator Z_i z $X = \partial_1$ ma postać

$$[X, Z_i] = \sum_{j=k+2}^{n} (\partial_1 g_j) \partial_j$$

Ale dla każdego x pola $X(x)$ i $Z_i(x)$ dają bazę A_x. Jako że pierwsze $k+1$ składowych $[X, Z_i](x)$ jest zerami oznacza to że $[X, Z_i](x) = 0$, czyli $[X, Z_i]$ jest zerem w otoczeniu y. To z kolei oznacza że pola Z_i są niezmiennicze na przesuniecia względem x_1. Niech R będzie podzbiorem otoczenia y jak wyżej składającym się z punktów x takich że $x_1 = y_1$. Zauważmy że pola Z_i są styczne do R, więc można je traktować jako pola na R. Ponadto Z_i generują moduł C nad $C^\infty(R)$ taki że $\dim(C_x) = k$. Z założenia indukcyjnego istnieje $S \subset R$ takie że $y \in S$ i $TS_x = C_x$. Bierzemy

$$N = \{x : (y_1, x_2, \ldots, x_n) \in R, x \in U\}$$

gdzie U jest wypukłym otoczeniem y takim że $[X, Z_i] = 0$. Jako że dla $x \in U$ pola Z_i nie zależą od pierwszej współrzędnej, to $Z_i(x) \in TN_x$. Ponadto $X \in TN_x$. Widać też że X i Z_i dają bazę TN_x. Ale z konstrukcji X i Z_i dają bazę A_x, czyli $TN_x = A_x$ co kończy dowód istnienia podrozmaitości N spełniającej $y \in N$ i $TN_x = A_x$ dla $x \in N$. Aby pokazać jednoznaczoność zaważmy że mamy lokalną jednoznaczność: jeśli N_1 i N_2 są jak wyżej to istnieje $U \subset N_1$, $U \subset N_2$ $y \in U$ takie że U jest otwarte w N_1 i N_2. Mianowicie, wybieramy pola $X_1, \ldots, X_{k+1}$ takie że $\{X_i(y)\}$ daje bazę A_y. Niech $\phi(s, t_1, \ldots, t_{k+1})$ będzie rozwiązaniem równania

$$\partial_s \phi(s, t_1, \ldots, t_n) = (\sum_i^{k+1} t_i X_i)(\phi(s, t_1, \ldots, t_n))$$

Na mocy warunku $TN_x = A_x$ pole

$$\sum_i^{k+1} t_i X_i$$

jest styczne do N, czyli $\phi(s, t_1, \ldots, t_{k+1})$ tam gdzie istnieje przyjmuje wartości w N. Niech

$$\psi(t_1, \ldots, t_{k+1}) = \phi(1, t_1, \ldots, t_{k+1}).$$

ψ istnieje i jest gładkie dla t bliskich 0. Ponadto pochodna ψ jest odwracalna, więc obraz pewnego otoczenia 0 przez ψ daje otoczenie y w N. Ale ψ zależy tylko od pól z A a nie zależy od tego jak otrzymaliśmy N, czyli mamy lokalną jednoznaczność N.

Teraz niech N będzie sumą spójnych podrozmaitości $N_\alpha \subset M$ takich że $y \in N_\alpha$ i $(TN_\alpha)_x = A_x$ dla każdego $x \in N_\alpha$. Jako bazę topologi na N bierzemy sumę baz z N_α, tzn. podzbiór N jest otwarty jeśli jego przekrój z każdym N_α jest otwarty. Strukturę różniczkową wprowadzamy podobnie: bierzemy mapy z N_α z dowolnym α. Pokazna już lokalna jednoznaczność oznacza że ten układ map jest zgodny, czyli daje strukturę różniczkową. A więc N jest podrozmaitością M. Ponadto lokalna jednoznaczność oznacza że $TN_x = A_x$ dla każdego $x \in N$ (bo w małym otoczeniu x N pokrywa się z N_α takim że $x \in N_\alpha$, a dla N_α ten warunek jest spełniony). Jako suma zbiorów spójnych zawierających wspólny punkt y N jest spójne. $\square$