Definicja. Przestrzenią jednorodną dla G nazywamy przestrzeń na której G działa tranzytywnie.

Lemat 0.1 *Każda przestrzeń jednorodna jest postaci G/Z gdzie Z jest podgrupą w G.*

Jeśli G jest grupą topologiczną to na G/Z rozpatrujemy topologię ilorazową.

Lemat 0.2 *Jeśli Z jest podgrupą domkniętą to G/Z jest Haussdorfa.*

Lemat 0.3 *Jeśli G jest grupą Liego z algebrą Liego $\mathbf{g}$ zaś Z jest domknięta to istnieje podprzestrzeń $V \subset \mathbf{g}$ i otwarte $U \subset V$, $0 \in U$ takie że odwzorowanie $\phi(u, z) = exp(u)z$ jest dyfeomorfizmem $U \times Z$ z otwartym podzbiorem G.*

Dowód: Najistotniejsze jest pokazanie różnowartościowości. Z jest podgrupą Liego z algebrą Liego $\mathbf{z} \subset \mathbf{g}$. Niech V bedzie podprzestrzenią w $\mathbf{g}$ dopełniczą do $\mathbf{z}$. Jeśli

$$\exp(v_1)z_1 = \exp(v_2)z_2$$

to

$$\exp(-v_2)\exp(v_1) = z_2 z_1^{-1}$$

czyli

$$\exp(-v_2)\exp(v_1) \in Z.$$

Jeśli $W \subset Z$ jest otwarte i $e \in W$ to $Z - W$ jest domknięte, $e \notin Z - W$, więc można dobrać U tak by

$$\exp(-U)\exp(U) \cap (Z - W) = \emptyset.$$

Pochodna ϕ w $(0, e)$ jest różnowartościowa, więc istnieją otwarte $X \subset V$, $0 \in X$ i $S \subset Z$, $e \in S$ takie że ϕ jest dyfeomorfizmem $X \times S$ z otwartym podzbiorem G.

Równość

$$\exp(-v_2)\exp(v_1) \in W$$

dałaby

$$\exp(v_1) \in \exp(v_2)W$$

co gdy $U \subset X$, $W \subset S$ oznacza że $v_1 = v_2$.

A więc faktyczne, dla dostatecznie małego U odwzorowanie ϕ jest różnowartościowe, czyli ϕ ma odwrotność.

W naszej konstrukcji ϕ jest dyfeomorfizmem na $U \times S$. Ale Z jest podgrupą i mamy

$$\phi(u, z) = \phi(u, zz_0^{-1})z_0$$

a więc gładkość odwrotności na obrazie $U \times S$ daje gładkość odwrotności na obrazie $U \times Z$. □

Lemat 0.4 *Jeśli G jest grupą Liego zaś Z jest domknięta to na G/Z istnieje dokładnie jedna struktura różniczkowa taka że działanie G na G/Z jest gładkie.*

Szkic dowodu: Niech $\mathbf{g}$ będzie algebrą Liego G. Niech V i U będą jak w Lemacie 0.3.

Niech π oznacza odwzorowanie ilorazowe z G na G/Z. Oznaczmy przez $L_g : G \to G$ odwzorowanie zadane wzorem $L_g(x) = gx$.

Zmniejszając U jeśli trzeba możemy zakładać że $\pi \circ L_g \circ \exp$ jest homeomorfizmem z U na otoczenie $[gZ] \in G/Z$. Mianowicie, z Lematu 0.3 wynika różnowartościowość. Nasze U zawiera zwarty podzbiór X taki że 0 należy do wnętrza X, a na podzbiorze zwartym ciągłe odwzorowanie różnowartościowe jest homeomorfizmem.

Teraz bierzemy odwrotności $\pi \circ L_g \circ \exp$ jako mapy. Widać że jest to zgodny układ map. Mianowicie, trzeba pokazać że jeśli dwie mapy η_i, $i = 1, 2$ mają dziedziny T_i, $i = 1, 2$ z niepustym $T = T_1 \cap T_2$ to na $\eta_1(T)$ funkcja $\eta_2 \circ \eta_1^{-1}$ jest gładka. Ale η_1^{-1} to $\pi \circ L_g \circ \exp$ zawężone do odpowiedniego podzbioru, więc wystarczy pokazać że $\eta_2 \circ \pi$ jest gładkie. Ale $\eta_2 \circ \pi$ możemy wyliczać przy pomocy odwrotności ϕ, co jest gładkie.

Z konstrukcji działanie G jest gładkie. Widać też że jest to jedyna możliwa konstrukcja, bo jeśli działanie jest gładkie to $\pi \circ L_g \circ \exp$ ma różnowartościową pochodną w zerze, więc jest lokalnie odwracalne i odwrotność można użyć jako mapę. □

Lemat 0.5 *Jeśli G jest grupą Liego z algebrą Liego $\mathbf{g}$ zaś Z jest domkniętą podgrupą normalną z algebrą Liego $\mathbf{z}$, to G/Z jest grupą Liego z algebrą Liego naturalnie izomorficzną z $\mathbf{g}/\mathbf{z}$.*

Lemat 0.6 *Jeśli G jest grupą zaś $N \subset G$ jest podgrupą normalną to G/N jest przemienna wtedy i tylko wtedy gdy $(G, G) \subset N$. Ponadto (G, G) jest dzielnikiem normalnym w G.*

Dowód: Z definicji (G, G) to podgrupa G generowana przez elementy postaci $xyx^{-1}y^{-1}$ z $x, y \in G$. Ten zbiór jest niezmienniczy na automorfizmy wewnętrzne, co oznacza że (G, G) jest dzielnikiem normalnym. Jeśli $(G, G) \subset N$ to w G/N zachodzi równość $xyx^{-1}y^{-1} = e$ co oznacza że G/N jest przemienna. Jeśli G/N jest przemienna to w G/N mamy $xyx^{-1}y^{-1} = e$, czyli dla $x, y \in G$ mamy $xyx^{-1}y^{-1} \in N$, czyli $(G, G) \subset N$. □

Lemat 0.7 *Grupa G jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg podgrup $N_0, \ldots, N_k$ taki że $N_0 = G$, $N_k = \{e\}$, N_{i+1} jest dzielnikiem normalnym w N_i i iloraz N_i/N_{i+1} jest przemienny.*

Dowód: Ciąg G^i z definicji grupy rozwiązalnej spełnia warunki wyżej. Mianowicie, $G^{i+1} = (G^i, G^i)$ co na mocy Lematu 0.6 jest dzielnikiem normalnym w G^i zaś iloraz G^i/G^{i+1} jest przemienny. A więc, jeśli grupa jest rozwiązalna to ciąg N_i jak wyżej istnieje.

Aby pokazać implikację w drugą stronę indukcyjnie pokażemy że $G^i \subset N_i$. Z definicji zachodzi to dla $i = 0$. Jeśli $G^i \subset N_i$ to $G^{i+1} = (G^i, G^i) \subset (N_i, N_i)$. N_i/N_{i+1} jest przemienna, więc na mocy Lematu 0.6 $(N_i, N_i) \subset N_{i+1}$. Czyli łącznie $G^{i+1} \subset N_{i+1}$.

Teraz już widać że $G_k \subset N_k = \{e\}$ czyli G jest rozwiązalna. $\square$

Lemat 0.8 *Grupa topologiczna G jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg podgrup domkniętych $N_0, \dots, N_k$ taki że $N_0 = G$, $N_k = \{e\}$, N_{i+1} jest dzielnikiem normalnym w N_i i iloraz N_i/N_{i+1} jest przemienny.*

Dowód: Jeśli taki ciąg istnieje to G jest rozwiązalna na mocy Lematu 0.7. Niech N_i będzie ciągiem podgrup z Lematu 0.7 i niech M_i będzie domknięciem w G podgrupy N_i. M_{i+1} jako domknięcie dzielnika normalnego w N_i jest dzielnikiem normalnym w M_i. Ponadto (M_i, M_i) jest domknięciem (N_i, N_i), czyli $(M_i, M_i) \subset M_{i+1}$, czyli mocy Lematu 0.6 M_i/M_{i+1} jest przemienna. $\square$

Lemat 0.9 *Jeśli $\mathbf{g}$ jest algebrą Liego, $\mathbf{n} \subset \mathbf{g}$ jest ideałem to $\mathbf{g}/\mathbf{n}$ jest przemienna wtedy i tylko wtedy gdy $[\mathbf{g}, \mathbf{g}] \subset \mathbf{n}$. Ponadto $[\mathbf{g}, \mathbf{g}]$ jest ideałem.*

Dowód: $[\mathbf{g}, [\mathbf{g}, \mathbf{g}]] \subset [\mathbf{g}, \mathbf{g}]$, czyli $[\mathbf{g}, \mathbf{g}]$ jest ideałem. Jeśli $[\mathbf{g}, \mathbf{g}] \subset \mathbf{n}$ to w $\mathbf{g}/\mathbf{n}$ mamy równość $[x, y] = 0$, czyli $\mathbf{g}/\mathbf{n}$ jest przemienna. Jeśli $\mathbf{g}/\mathbf{n}$ jest przemienna to w $\mathbf{g}/\mathbf{n}$ mamy $[x, y] = 0$, czyli dla $x, y \in \mathbf{g}$ mamy $[x, y] \in \mathbf{n}$, czyli $[\mathbf{g}, \mathbf{g}] \subset \mathbf{n}$.
$\square$

Lemat 0.10 *Algebra Liego $\mathbf{g}$ jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg podalgebr $\mathbf{n}_i$, $i = 0, \dots, k$ taki że $\mathbf{n}_0 = \mathbf{g}$, $\mathbf{n}_k = \{0\}$, $\mathbf{n}_{i+1}$ jest ideałem w $\mathbf{n}_i$ i iloraz $\mathbf{n}_i/\mathbf{n}_{i+1}$ jest przemienny.*

Dowód: Podobny do dowodu Lematu 0.7, ale używając Lemat 0.9 zamiast Lematu 0.6 $\square$

Lemat 0.11 *Spójna grupa Liego G z algebrą Liego $\mathbf{g}$ jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{g}$ jest rozwiązalna.*

Dowód: Jeśli $\mathbf{g}$ jest rozwiązalna, to zgodnie z zdaniem na liście jednospójna grupa Liego $\tilde{G}$ z algebrą Liego $\mathbf{g}$ jest iterowanym produktem półprostym prostych. Taka grupa jest rozwiązalna, a więc również G jako iloraz $\tilde{G}$ jest rozwiązalna.

Jeśli G jest rozwiązalna to na mocy Lematu 0.8 istnieje ciąg podgrup domkniętych a więc Liego N_i taki że $N_0 = G$, $N_k = \{e\}$, N_{i+1} jest dzielnikiem normalnym N_i i iloraz N_i/N_{i+1} jest przemienny. Niech $\mathbf{n}_i$ będzie algebrą Liego N_i. Wtedy $\mathbf{n}_0 = \mathbf{g}$, $\mathbf{n}_k = \{0\}$. $\mathbf{n}_{i+1}$ jest ideałem w $\mathbf{n}_i$ bo N_{i+1} jest dzielnikiem normalnym w N_i. $\mathbf{n}_i/\mathbf{n}_{i+1}$ jest przemienna na mocy Lematu 0.5, A więc $\mathbf{n}_i$ spełniają warunki Lematu 0.10 czyli $\mathbf{g}$ jest rozwiązalna. $\square$

Lemat 0.12 *(twierdzenie Liego) Jeśli* $\mathbf{g}$ *jest algebrą Liego endomorfizmów nietrywialnej skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej* V *nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki* 0*, to można wybrać bazę* V *tak że elementy* $\mathbf{g}$ *będą przedstawione macierzami górnotrójkątnymi. W szczególności istnieje wspólny wektor własny dla wszystkich elementów* $\mathbf{g}$.

Dowód: Najpierw zauważmy że wystarczy pokazać ostatni punkt, tzn. istnienie wspólnego wektora własnego. Mając taki wektor v rozważamy działanie $\mathbf{g}$ na $V_1 = V/(\mathbb{R}v)$. Indukcyjnie, istnieje baza $w_1, \dots w_k$ przestrzenie V_1 taka że działanie $\mathbf{g}$ jest przez macierze górnotrójkątne. Niech $v_1, \dots, v_k$ będą takie że $w_i = v_i + \mathbb{R}v$. Jako bazę V bierzemy teraz $v_1, \dots, v_k, v$. Widać że w tej bazie elementy $\mathbf{g}$ mają postać górnotrójkątną.

W więc pozostaje pokazać istnienie wspólnego wektora własnego. Robimy to indukcyjnie względem wymiaru $\mathbf{g}$. Jeśli $\dim(\mathbf{g}) = 1$ to $\mathbf{g}$ jest przemienna, generowana przez pojedynczy element i wektor własny istnieje na mocy znanych własności odwzorowań i tego że ciało jest algebraicznie domknięte. Jeśli $\dim(\mathbf{g}) > 1$ to w $\mathbf{g}$ istnieje ideał $\mathbf{h}$ kowymiaru 1 i element x takie że jako przestrzeń wektorowa $\mathbf{g} = \mathbb{R}x \oplus \mathbf{h}$. Z założenia indukcyjnego elementy $\mathbf{h}$ mają wspólny wektor własny u_0, tzn. istnieje funkcjonał liniowy λ na $\mathbf{h}$ taki że dla $h \in \mathbf{h}$ mamy $hu_0 = \lambda(h)u_0$.

Rozważmy podprzestrzeń U z bazą u_i, $i = 0, \dots, l$ gdzie

$$u_{i+1} = xu_i$$

zaś l jest maksymalne takie że u_i są liniowo niezależne. Rozważmy też podprzestrzenie $U_j = \mathrm{lin}\{u_i : i < j\}$. Dla $h \in \mathbf{h}$ mamy

$$hu_i \in \lambda(h)u_i + U_i.$$

Pokazujemy to indukcyjnie: dla $i = 0$ jest to fakt że u_0 jest wspólnym wektorem własnym dla $\mathbf{h}$. Jeśli mamy zawieranie dla i to piszemy

$$hu_{i+1} = hxu_i = xhu_i + [h, x]u_i.$$

Z założenia indukcyjnego

$$xhu_i \in x\lambda(h)u_i + xU_i \subset \lambda(h)u_{i+1} + U_{i+1}.$$

Jako że $[h, x] \in \mathbf{h}$ to z założenia indukcyjnego $[h, x]u_i \in U_{i+1}$ co kończy indukcyjny dowód równości wyżej. Teraz zauważmy że zapisując działanie $\mathbf{h}$ na U w bazie $u_l, u_{l-1}, \dots, u_0$ elementy $h \in \mathbf{h}$ mają postać górnotrójkątną z $\lambda(h)$ na diagonali. A więc

$$l\lambda(h) = \mathrm{Tr}(h|_U).$$

Zauważmy że U jest niezmiennicze dla $\mathbf{g}$. A więc jeśli $h \in [\mathbf{g}, \mathbf{g}] \subset \mathbf{h}$ to

$$\lambda(h) = \mathrm{Tr}(h|_U)/l = 0$$

(tu używamy założenie że charakterystyka ciała to 0).

Teraz indukcyjnie pokazujemy że $hu_i = 0$ dla $h \in [\mathbf{g}, \mathbf{g}]$. Mianowicie,

$$hu_0 = \lambda(h)u_0 = 0,$$

$$hu_{i+1} = hxu_i = xhu_i + [h, x]u_i = 0$$

gdzie w ostatniej równości dwa razy używamy założenie indukcyjne.

A więc elementy $[\mathbf{g}, \mathbf{g}]$ obcięte do U dają operatory zerowe, czyli elementy $\mathbf{g}$ obcięte do U komutują. Dla komutujących operatorów w przestrzeni nad ciałem algebraicznie domkniętym istnienie wspólnego wektora własnego to standartowy wynik, co kończy dowód. $\square$