Lemat 0.1 *(twierdzenie Engela) Jeśli* $\mathbf{g}$ *jest algebrą Liego nilpotentnych endomorfizmów nietrywialnej skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej* V*, to istnieje niezerowy* $v \in V$ *taki że dla każdego* $x \in \mathbf{g}$ *mamy* $xv = 0$*.*

Dowód: Indukcja ze względu na wymiar $\mathbf{g}$. Niech $\mathbf{m}$ będzie maksymalną podalgebrą w $\mathbf{g}$ taką że $\mathbf{m} \neq \mathbf{g}$. Zauważmy że jesli x jest nilpotentnym endomorfizmem to ad_x jest nilpotentny:

$$\mathrm{ad}_x(y) = xy - yx = (L_x - R_x)(y)$$

gdzie $L_x(y) = xy$ i $R_x(y) = yx$. L_x i R_x komutują, więc

$$\mathrm{ad}_x^n = (L_x - R_x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} L_x^{n-i}(-R_x)^i.$$

Jeśli $x^k = 0$ i $n = 2k$ to co najminiej jedno z i i $n-i$ jest większe lub równe k. Jeśli $i \geq k$ to $(-R_x)^i = 0$, jeśli $n - i \geq k$ to $L_x^{n-i} = 0$. Czyli każdy człon sumy wyżej jest zerem i $\mathrm{ad}_x^n = 0$. Rozważmy teraz działanie $\mathbf{m}$ na $\mathbf{g}/\mathbf{m}$. Jak pokazaliśmy $\mathbf{m}$ działa przez endomorfizmy nilpotentne, więc istnieje $x \in \mathbf{g}$ taki że $[y, x] \in \mathbf{m}$ dla $y \in \mathbf{m}$. Niech $\mathbf{h}$ będzie podprzestrzenią $\mathbf{g}$ rozpinaną przez x i $\mathbf{m}$. $\mathbf{h}$ jest podalgebrą, więc z maksymalności $\mathbf{m}$ mamy $\mathbf{h} = \mathbf{g}$. Czyli $\mathbf{m}$ jest ideałem kowymiaru 1 z elementem dopełniczym x.

Niech W będzie podprzestrzenią V składającą się takich $v \in V$ że dla każdego $y \in \mathbf{m}$ mamy

$$yv = 0.$$

Na mocy założenia indukcyjnego W jest nietrywialna. Jeśli $v \in W$ to $xv \in W$. Mianowicie

$$yxv = xyv + [y, x]v = 0$$

bo $yv = 0$ i $[y, x] \in \mathbf{m}$ czyli również $[y, x]v = 0$. Jako że x jest endomorfizmem nilpotentnym, to istnieje $v \in W$, $v \neq 0$, taki że $xv = 0$. □

Lemat 0.2 *Jeśli* $\mathbf{g}$ *jest algebrą Liego nilpotentnych endomorfizmów nietrywialnej skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej* V*, to można wybrać bazę* V *tak że w tej bazie elementy* $\mathbf{g}$ *mają postać górnotrójkątną z zerami na diagonali.*

Dowód: Indukcja używając Lemat 0.1. □

Lemat 0.3 *Skończenie wymiarowa algebra Liego* $\mathbf{g}$ *nad ciałem jest nilpotentna wtedy i tyko wtedy gdy dla każdego* $x \in \mathbf{g}$ *endomorfizm* ad_x *jest nilpotentny.*

Dowód. Z definicji algebra jest nilpotentna jeśli istnieje k takie że

$$[x_1, [x_2, \ldots, x_{k+1}]] = 0$$

dla dowolnych $x_1, \ldots, x_{k+1} \in \mathbf{g}$. Oznacza to że

$$\mathrm{ad}_{x_1} \mathrm{ad}_{x_2} \ldots \mathrm{ad}_{x_k} = 0$$

czyli w szczególności $\mathrm{ad}_x^k = 0$ dla dowolnego $x \in \mathbf{g}$. Innymi słowy ad_x jest nilpotentny.

Niech $\mathbf{h}$ oznacza obraz $\mathbf{g}$ przez ad. Jeśli ad_x jest nilpotetny dla dowolnego $x \in \mathbf{g}$ to $\mathbf{h}$ składa się z endomorfizmów nilpotentnych, a więc na mocy Lematu 0.2 elementy $\mathbf{h}$ można zapisać w postaci górnotrójkątnej z zerami na diagonali. Taka algebra jest nilpotentna. $\mathbf{h}$ jest izomorficzna z ilorazem $\mathbf{g}$ przez centrum, a więc również $\mathbf{g}$ jest nilpotentna. □

0.1 Rozkład spektralny endomorfizmu i algebry nilpotentnej

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem, zaś $A : V \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym. Definiujemy

$$V_\lambda = \{v \in V : \exists_k (A - \lambda I)^k v = 0\}$$

Uwaga: Powyżej można by napisać $(A - \lambda I)^{\dim(V)} v = 0$. Mamy też $(A - \lambda I)^{\dim(V_\lambda)} v = 0$.

Lemat 0.4 *Jeśli V i A są jak wyżej to V_λ jest zachowywana przez A. Jeśli ciało jest algebraicznie domknęte to*

$$V = \oplus_\lambda V_\lambda$$

Lemat 0.5 *Jeśli V i A są jak wyżej, $B : V \to V$ jest odwzorowaniem liniowym takim że $\mathrm{ad}_A(B)^l = 0$ dla pewnego $l > 0$ to B zachowuje V_λ.*

Dowód: Indukcja ze względu na l. Jeśli $l = 1$ to oznacza że A i B komutują, czyli

$$(A - \lambda I)^k B v = B (A - \lambda I)^k v = 0$$

dla $v \in V_\lambda$ i $k = \dim(V_\lambda)$, czyli B zachowuje V_λ.

W kroku indukcyjnym zakładamy że wynik jest prawdziwy dla l i rozpatrujemy B takie że $\mathrm{ad}_A(B)^{l+1} = 0$. Mamy wzór

$$[(A - \lambda I)^k, B] = \sum_{j=0}^{k-1} (A - \lambda I)^{k-j-1} [A - \lambda I, B] (A - \lambda I)^j$$

Zauważmy że $C = [A - \lambda I, B] = [A, B] = \mathrm{ad}_A(B)$, czyli

$$\mathrm{ad}_A(C)^l = \mathrm{ad}_A(B)^{l+1} = 0.$$

A więc z założenia indukcyjnego $C V_\lambda \subset V_\lambda$, czyli dla $v \in V_\lambda$ mamy

$$[A - \lambda I, B](A - \lambda I)^j v \in V_\lambda.$$

Teraz niech $k = 2\dim(V_\lambda) + 1$. Wtedy we wzorze wyżej albo $j \geq \dim(V_\lambda)$ albo $k - j - 1 \geq \dim(V_\lambda)$. Jeśli $j \geq \dim(V_\lambda)$ to

$$(A - \lambda I)^j v = 0.$$

Jeśli $k-j-1 \geq \dim(V_\lambda)$ to

$$(A-\lambda I)^{k-j-1}[A-\lambda I, B](A-\lambda I)^j v = 0.$$

To oznacza że wszystkie człony sumy dającej $[(A-\lambda I)^k, B]v$ są zerami, czyli

$$[(A-\lambda I)^k, B]v = 0$$

czyli

$$(A-\lambda I)^k Bv = B(A-\lambda I)^k v + [(A-\lambda I)^k, B]v = 0$$

dla $v \in V_\lambda$, co oznacza że B zachowuje V_λ. □

Teraz uogólniamy definicję wyżej. Niech N będzie podprzestrzenią przestrzeni endomorfizmów skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem zaś λ będzie funkcjonałem liniowym na N. Defininujemy

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall_{A \in N} \exists_k (A - \lambda(A))^k v = 0\}.$$

Uwaga: Jak dla pojedynczego endomorfizmu można brać $k = \dim(V)$, czy też $k = \dim(V_\lambda)$.

Jeśli V_λ jest nietrywialne to mówimy że λ jest funkcjonałem pierwiastkowym dla N (czasami wygodnie jest dopuścić przypadek trywialny i traktować dowolny funkcjonał liniowy jako funkcjonał pierwiastkowy).

Lemat 0.6 *Niech N będzie nilpotentną algebrą Liego endomorfizmów skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0. Wtedy*

$$V = \oplus_\lambda V_\lambda.$$

Ponadto można wybrać bazy w V_λ tak by elementy $A \in N$ miały postać górnotrójkątną z $\lambda(A)$ na diagonami.

Dowód: Rozpatrzmy najpierw przypadek gdy N zawiera element A z co namniej dwoma różnymi wartościami własnymi. A więc

$$V = \oplus_\eta V_\eta$$

gdzie η przebiega wartości własne A. Jako że N jest nilpotentna, to dla każdego $B \in N$ mamy $\mathrm{ad}_A(B)^l = 0$, a więc na mocy Lematu 0.5 elementy N zachowują rozkład wyżej. Czyli redukujemy problem do przypadku gdy wszystkie elementy $A \in N$ mają dokładnie jedną wartość własną $\lambda(A)$ (wartość własna istnieje, bo ciało jest algebraicznie domknięte). Wtedy

$$\mathrm{Tr}(A) = \dim(V)\lambda(A).$$

Zakładamy że ciało jest charakterystyki 0, czyli oznacza to że $\lambda(A)$ jest funkcjonałem liniowym na N. Ponadto wtedy $A - \lambda(A)$ ma jedną wartość własną równą 0 i

$$V = V_\lambda.$$

N jako algebra nilpotentna jest rozwiązalna, a więc na mocy twierdzenia Liego można wybrać bazę w V_λ tak by elementy N miały postać górnotrójkątną. Oczywiście w takiej bazie $A \in N$ ma $\lambda(A)$ na diagonali. □