1 Konstrukcje uniwersalne 2

Niech R będzie pierścieniem przemiennym zaś M będzie R-modułem. Powiemy że algebra $S(M)$ nad R która jest łączna i przemienna z odwzorowaniem R-liniowym $\iota : M \to S(M)$ jest algebrą symetryczną M wtedy i tylko wtedy gdy każde odwzorowanie R-liniowe f z M w algebrę T nad R która jest łączna i przemienna jednoznacznie przedłuża się do homomorfizmu h z $S(M)$ w T, tzn. istnieje dokładnie jedno h takie że $f = h \circ \iota$.

Lemat 1.1 *Algebra symetryczna istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.*

Dowód: Można wziąść $T(M)/I$ gdzie I jest ideałem w $T(M)$ generowanym przez $\{xy - yx : x, y \in M\}$. Jednoznaczność z dokładnością do izomorfizmu to standartowy argument. □

Lemat 1.2 *Niech M będzie modułem wolnym nad R z bazą $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$. Wtedy $S(M)$ jest izomorficzne z pierścieniem wielomianów od X_α.*

Dowód: Odwzorowanie R-liniowe na M jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości na bazie. Wynika stąd że pierścień wielomianów ma własność uniwersalną $S(M)$, czyli jest izomorficzny z $S(M)$. □

Teraz niech M będzie algebrą Liego nad R. W algebrze obwiedniej $U(M)$ niech U_k oznacza podmoduł generowany przez produkty elementów M długości mniejszej lub równej k. Niech V_k oznacza U_k/U_{k-1} (iloraz jako R-moduł).

Lemat 1.3 *Przy założeniach jak wyżej*

$$U_k U_l \subset U_{k+l}.$$

Ponadto mnożenie w $U(M)$ daje dobrze zdefiniowane odwzorowanie z $V_k \times V_l$ w V_{k+l}. To daje mnożenie na

$$V = \oplus_{k=0}^{\infty} V_k.$$

Jeśli M jest modułem wolnym to V z tym mnożeniem jest izomorficzne z $S(M)$.

Dowód: Zawieranie $U_k U_l \subset U_{k+l}$ jest oczywiste. Wynika stąd że produkt elementów V_k i V_l w $U(M)$ jest zdefiniowany jednoznacznie z dokładnością do elementu $U_{k-1}U_l + U_k U_{l-1} \subset U_{k+l-1}$, czyli jest jednoznaczny jako element V_{k+l}. Jeśli M jest modułem wolnym, to baza $U(M)$ jest taka sama jak w przypadku przemiennym zaś iloczym elementów U_k i U_l różni się od przypadku przemiennego tylko o elementy niższego rzędu. Czyli iloczyn elementów V_k i V_l nie zależy od nawiasu Liego i jest taki sam jak w przypadku przemiennym. Ale w przypadku przemiennym wynik jest oczywisty. □

Lemat 1.4 *Istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr $\Delta : U(L) \to U(L) \otimes U(L)$ taki że dla $x \in L$ mamy*

$$\Delta(\iota(x)) = \iota(x) \otimes 1 + 1 \otimes \iota(x).$$

Jeśli R jest ciałem charakterystyki 0 to

$$\{y \in U(L) : \Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y\} = \iota(L).$$

Dowód: Pierwsza część jest jasna. By pokazać drugą zauważmy że wtedy L jest modułem wolnym. Najpierw rozpatrzymy przypadek przemienny. Wtedy $U(L)$ jest izomorficzne z pierścieniem wielomianów $R(X)$, $U(L) \otimes U(L)$ odpowiada $R(X, Y)$, zaś odwzorowanie Δ odpowada podstawieniu

$$\Delta(p(X)) = p(X + Y).$$

Czyli równość

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

oznacza

$$p(X + Y) = p(X) + p(Y).$$

Jeśli p jest wielomianem jednorodnym stopnia n to podstawiając $Y = X$ mamy

$$2^n p(X) = p(2X) = p(X + X) = p(X) + p(X) = 2p(X)$$

czyli $2 = 2^n$ co w charakterystyce 0 jest możliwe tylko wtedy gdy $n = 1$ czyli p jest liniowy, czyli odpowiedni element $U(M)$ jest obrazem elementu M.

W ogólnym przypadku patrzymy na część najwyższego rzędu n w x jako element pierscienia V z poprzedniego lematu. Do niego stosuje się część przemienna, co oznacza że $n = 1$, czyli $x \in R \oplus M$. Łatwo zauważyć że część z R nie spełnia naszego warunku, więc $x \in M$, co kończy dowód. □

1.1 Szeregi Liego

W tej części zakładamy że R jest ciałem charakterystyki 0. Rozpatrzny najpierw wolną algebrę Liego generowaną przez zbiór X, tzn. algebrę Liego F nad R z odwzorowaniem $\iota : X \to F$ taką że każde odwzorowanie f z X w algebrę Liego A nad R jednoznacznie przedłuża się do homomorfizmu z F w A. Dokładniej, przy danym f istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr Liego h z F w A taki że $f = h \circ \iota$. Istnienie h moża dowodzić na wiele sposobów, w szczególności działa standartowa konstrukcja przez podobiekt (podalgebrę) odpowiedniego dużego produktu.

Lemat 1.5 *Niech M będzie modułem wolnym nad R z bazą X i niech F będzie wolną algebrą Liego generowaną przez X. Wtedy uniwersalna algebra obwiednia $U(F)$ jest naturalnie izomorficzna z algebrą tensorową $T(M)$, zaś F jest izomorficzna z podalgebrą Liego w $T(M)$ generowaną przez obraz X.*

Dowód. Niech S będzie algebrą łączną nad R. Z własności modułu wolnego odwzorowanie f z X w S jednoznacznie przedłuża się do odwzorowania R-liniowego z M w S. Z własności algebry tensorowej $T(M)$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm h z $T(M)$ w S przedłużający f. Niech F' oznacza podalgebrą Liego w $T(M)$ generowaną przez X. Pokazane wyżej istnienie i jednoznaczność h oznacza że $T(M)$ jest uniwersalną algebrą obwiednią dla F'. A więc mając dane odwzorowanie f z X w A otrzymamy dokładnie jeden homomorfizm h z $T(M)$ w $U(A)$ taki że $\iota_A f = h \circ \iota_X$ gdzie ι_A oznacza włożenie z A w $U(A)$ zaś ι_X oznacza włożenie X w $T(M)$. Zakładamy że R jest ciałem, więc algebra Liego A nad R automatycznie jest modułem wolnym, czyli ι_A jest różnowartościowa. A więc ograniczając h do F' otrzymamy homomorfizm algebr Liego z F' w A. Oczywiście ten homomorfizm jest jedyny bo X generuje F'. A więc F' ma własność uniwersalną algebry wolnej, czyli F' jest izomorficzne z F. □

Przypominijmy sobie że

$$T(M) = \oplus_{k=0}^{\infty} M^{\otimes k}.$$

Czyli każdy element $T(M)$ jest skończoną sumą elementów z $M^{\otimes k}$ dla różnych k. Intuicyjnie gdy M jest modułem wolnym generowanym przez X, to $T(M)$ to algebra nieprzemiennych wielomianów z zmiennych X. Chcemy teraz przejść do formalnych szeregów potęgowych. Intuicyjnie są to nieskończone sumy elementów z $M^{\otimes k}$ dla rosnących k. Dokładniej,

$$\tilde{T}(M) = \prod_{k=0}^{\infty} M^{\otimes k}$$

czyli $\tilde{T}(M)$ to produkt, czyli elementy to ciągi których k-ta składowa należy do $M^{\otimes k}$. Dodawanie w $\tilde{T}(M)$ jest po składowych. Mnożenie elementów z $M^{\otimes k}$ i $M^{\otimes l}$ jak dla $T(M)$ daje nam element $M^{\otimes (k+l)}$. Dla danego n istnieje tylko skończenie wiele liczb naturalnych k i l takich że $k+l=n$, a więc dowolną składową produktu w $\tilde{T}(M)$ można wyliczyć przy pomocy skończonej ilości operacji, czyli mnożenie w $\tilde{T}(M)$ jest dobrze zdefiniowane.

Na $\tilde{T}(M)$ można rozpatrywać topologię, manowicie na $M^{\otimes k}$ bierzemy topologię dysktetną, zaś na $\tilde{T}(M)$ topologię produktową. W tej topologi ciąg t_n jest zbieżny do granicy t wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego k istnieje l takie że dla każdego $n \geq l$ różnica $t_n - t$ ma zerowe składowe w $M^{\otimes m}$ dla $m = 0, \ldots, k$.

Będziemy potrzebowali kompozycję zwykłych formalnych szeregów potęgowych z elementami $\tilde{T}(M)$ których człon stały (tzn. składowa w R) jest zerem. Rząd $\operatorname{ord}(x)$ elementu $x \in \tilde{T}(M)$ definiujemy jako maksymalne k takie że składowe x w $M^{\otimes m}$ dla $m = 0, \ldots, k$ są równe zero. Jeśli $x = 0$ to przyjmujemy że rząd x jest nieskończony. Zauważmy że ciąg elementów $\{t_n\}$ jest zbieżny w $\tilde{T}(M)$ do t wtedy i tylko wtedy gdy $\liminf \operatorname{ord}(t_n - t) = \infty$.

Lemat 1.6 $\operatorname{ord}(xy) = \operatorname{ord}(x) + \operatorname{ord}(y)$. $\operatorname{ord}(x+y) \geq \max(\operatorname{ord}(x), \operatorname{ord}(y))$ *z równością jeśli* $\operatorname{ord}(x) \neq \operatorname{ord}(y)$. *Jeśli* $x_n \in \tilde{T}(M)$, $\liminf \operatorname{ord}(x_n) = \infty$ *to szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

jest zbieżny w $\tilde{T}(M)$. Jeśli $\operatorname{ord}(x) > 0$, $a_n \in R$, *to szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest zbieżny w $\tilde{T}(M)$.

Dowód. Równość $\operatorname{ord}(xy) = \operatorname{ord}(x) + \operatorname{ord}(y)$ wynika wprost z definicji mnożenia w $\tilde{T}(M)$. Podobnie nierówność (i przypadek równości) $\operatorname{ord}(x + y) \geq \max(\operatorname{ord}(x), \operatorname{ord}(y))$ wynika wprost z definicji dodawania w $\tilde{T}(M)$. Zauważmy że jesli $\operatorname{ord}(x_n) > k$ dla $n \geq l$, to odpowiednie x_n mają zerową składową w $M^{\otimes k}$. A więc suma pierwszych l składników szeregu wyznacza nam jednoznacznie k-tą składową sumy całego szeregu. Widać też że sumy częściowe zbiegają do tak wyznaczonej sumy szeregu. Jako że $\operatorname{ord}(a_x x^n) \geq n\operatorname{ord}(x)$, to ostatni szereg jest zbieżny. □

Zwykłe formalne szeregi potęgowe jednej zmiennej można traktować jako przypadek szczególny konstrukcji wyżej odpowiadający jednoelementowemu zbiorowi X. A więc mamy zdefiniowane ord dla zwykłych szeregów formalnych. Podato ostatni punkt lematu wyżej oznacza że jest dobrze zdefiniowana kompozycja zwykłego szeregu potęgowego z szeregiem potęgowym mającym wyraz wolny równy zero. Możemy też rozpatrywać zwykłe szeregi potęgowe jednej zmiennej x z wyrazem wolnym równym zero jako półgrupę względem składania szeregów. Wtedy szereg jednowyrazowy x jest jedynką.

Lemat 1.7 *Niech t będzie zwykłym formalnym szeregiem potęgowym. t ma odwrotność względem kompozycji szeregów z* $\operatorname{ord}(y) > 0$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $\operatorname{ord}(t) = 1$.

Dowód. By znaleźć lewą lub prawą odwrotność musimy rekursywnie rozwiązać odpowiedni układ równań. Dla lewej odwrotności chcemy by

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = x.$$

Zauważmy że

$$\operatorname{ord}(\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n) \geq 2$$

zaś $\operatorname{ord}(x) = 1$, czyli równość wyżej jest możliwa tylko gdy $\operatorname{ord}(t) = 1$. Podobnie prawa odwrotność może istnieć tylko gdy $\operatorname{ord}(t) = 1$.

Dalej będziemy zakładać że $\operatorname{ord}(t) = 1$. Gdy znane są $a_1, \ldots a_k$ takie że

$$\operatorname{ord}(\left(\sum_{n=1}^{k} a_n t^n\right) - x) \geq k + 1$$

to zauważmy że $\operatorname{ord}(t^{k+1}) = k+1$, a więc w iloczynie $a_{k+1}t^{k+1}$ możemy uzyskać dowolną wartość współczynnika przy x^{k+1}, zaś współczynniki przy niższych potęgach x są zerami. Pozwala to dobrać a_{k+1} tak by wyzerować współczynnik przy x^{k+1} w kompozycji, tzn. uzyskać nierówność

$$\mathrm{ord}(\left(\sum_{n=1}^{k+1} a_n t^n\right) - x) \geq k+2.$$

A więc faktycznie można rekursywnie wyznaczyć wszystkie a_n tak by szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ był lewą odwrotnością względem złożenia dla t. Podobnie można wyznaczyć prawą odwrotność. Skoro istnieje lewa i prawa odwrotność to są one równe i szereg jest odwracalny. □

Zauważmy że dla zwykłych formalnych szeregów potęgowych możemy zdefiniować różniczkowanie, różniczkując wyraz po wyrazie. Różniczkowanie spełnia regułę Leibnitza, zachodzi też wzór na pochodną złożenia. Ponadto szereg jest stały (jedyny niezerowy wyraz to wyraz wolny) wtedy i tylko wtedy gdy jego pochodna jest zerem.

Dalej potrzebne nam będą szeregi $\log(1+x)$ i $\exp(x)$ zdefiniowane jako

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Mamy

$$\partial_x \exp(x) = \exp(x),$$

$$\partial_x \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Teraz rozpatrujemy działanie zwykłych szeregów potęgowych na $\tilde{T}(M)$ przez składanie. Zauważmy że jest to działanie półgrupy, tzn. kompozycja szeregów działa przez kompozycję działań.

Lemat 1.8 *Odwzorowanie $t \mapsto \exp(t)$ odwzorowuje różnowartościowo szeregi z wyrazem wolnym równym zero na szeregi z wyrazem wolnym równym 1. Podobnie $t \mapsto \log(t)$ odwzorowuje różnowartościowo szeregi z wyrazem wolnym równym 1 na szeregi z wyrazem wolnym równym zero. Dla szeregu t z wyrazem wolnym równym 0 mamy $\exp(\log(1+t)) = 1+t$ i $\log(\exp(t)) = t$.*

Dowód. Zauważmy najpierw że wystarczy to pokazać dla zwykłych formalnych szeregów potęgowych jednej zmiennej. Mianowicie, wzory dają nam odwrotność, zaś przy działaniu na $\tilde{T}(M)$ kompozycja przechodzi ma kompozycję, więc dostaniemy wzory na odwrotność w $\tilde{T}(M)$, co implikuje odpowiednią różnowartościowość i to że odworowanie jest na.

Dla zwykłych szeregów zauważmy że $\mathrm{ord}(\exp(x) - 1) = 1$ czyli kompozycja z $\exp(x) - 1$ jest odwracalna co implikuje że że exp jest różnowartościowe i na szeregi z wyrazem wolnym 1. Licząc pochodne mamy

$$\partial_x \log(\exp(x)) = \frac{\exp(x)}{\exp(x)} = 1$$

czyli

$$\log(\exp(x)) = x + c$$

Ale łatwo zauważyć że wyraz wolny $\log(\exp(x))$ to zero, czyli mamy równość $\log(\exp(x)) = x$. Z odwracalności $\exp(x) - 1$ wynika teraz równość $\exp(\log(1 + x)) = 1 + x$. $\square$

Element $t \in \tilde{T}(M)$ nazywamy szeregiem Liego jeśli wszystkie wyrazy t są elementami wolnej algebry Liego.

Zauważmy że $\tilde{T}(M) \otimes \tilde{T}(M)$ można traktować jako podzbiór produktu

$$\prod_{k,l} M^{\otimes k} \otimes M^{\otimes l}$$

który jest izomorficzny z $\tilde{T}(M \oplus M)$. A więc definicja rzędu i pojęcie elementu jednorodnego mają sens dla elementów $\tilde{T}(M) \otimes \tilde{T}(M)$. Zbieżność ma sens, ale potencjalnie ciąg Cauchy'ego mógłby dać jako granicę element $\tilde{T}(M \oplus M)$ który nie odpowiada elementowi $\tilde{T}(M) \otimes \tilde{T}(M)$. Jednakże niżej granice będą leżeć w $\tilde{T}(M) \otimes \tilde{T}(M)$.

Jak poprzednio możemy zdefinować odwzorowanie Δ z $\tilde{T}(M)$ w $\tilde{T}(M) \otimes \tilde{T}(M)$ i że zachodzi analog lematu 1.4. Mianowicie, w przypadku wolnej algebry Liego Δ jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości na zbiorze generatorów X. Wynika stąd że Δ przeprowadza elementy jednorodne w $T(M)$ na elementy jednorodne w $T(M) \otimes T(M)$, co oznacza że również w $\tilde{T}(M)$ odwzorowanie Δ działa składowa po składowej odwzorowując elementy jednorodne na elementy jednorodne tak samo jakby to były elementy $T(M)$. A więc kryterium z lematu 1.4 można użyć dla każdej składowej z osobna. Czyli mamy

Lemat 1.9 *x jest szeregiem Liego wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

Lemat 1.10 *x jest szeregiem Liego wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\exp(\Delta(x)) = \exp(x) \otimes \exp(x).$$

Dowód: Mamy

$$\exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = (\exp(x \otimes 1) \cdot \exp(1 \otimes x)$$

$$= (\exp(x) \otimes 1) \cdot (1 \otimes \exp(x)) = \exp(x) \otimes \exp(x)$$

czyli

$$\exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = \exp(x) \otimes \exp(x).$$

A więc jeśli jest szeregiem Liego to

$$\exp(\Delta(x)) = \exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = \exp(x) \otimes \exp(x)$$

czyli zachodzi podana równość. Jeśli zachodzi równość

$$\exp(\Delta(x)) = \exp(x) \otimes \exp(x)$$

to

$$\exp(\Delta(x)) = \exp(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$$

czyli

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

co oznacza że x jest szeregiem Liego. $\square$

Lemat 1.11 *Niech x i y będą szeregami Liego i niech*

$$z = \log(\exp(x)\exp(y)).$$

Wtedy z jest szeregiem Liego.

Dowód: Z założenia

$$\exp(z) = \exp(x)\exp(y)$$

i

$$\Delta(\exp(z)) = \Delta(\exp(x)\exp(y)).$$

Jako że x i y są szeregami Liego to

$$\Delta(\exp(x)\exp(y)) = \Delta(\exp(x))\Delta(\exp(y)) = (\exp(x)\otimes\exp(x))\cdot(\exp(y)\otimes\exp(y))$$

$$= (\exp(x)\exp(y)) \otimes (\exp(x)\exp(y))$$

czyli

$$\Delta(\exp(z)) = \exp(z) \otimes \exp(z)$$

co oznacza że z jest szeregiem Liego. $\square$