

1. Niech G będzie grupą Liego zaś $\gamma : (-1, 1) \rightarrow G$ odwzorowaniem klasy C^∞ takim że $\gamma(0) = e$ (gdzie e oznacza jedynekę G). Uzasadnij że wzór

$$(Xf)(x) = \partial_t f(\gamma(t)x)|_{t=0}$$

zadaje pole wektorowe na G niezmiennicze na prawe przesunięcia.

2. Sprawdź że podana na wykładzie realizacja grupy Heisenberga i realizacja macierzmi podana niżej są izomorficzne. Przypominam że pierwsza realizacja to $\mathbb{R}^3$ z mnożeniem zadanym wzorem $(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1))$. Realizacja macierzami to macierze postaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wylicz algebrę Liego.

3. Niech M będzie przestrzenią macierzy n na n zaś h będzie funkcją C^∞ z M w $\mathbb{R}^k$ taką że $G = h^{-1}(0)$ jest grupą z mnożeniem macierzowym i zawiera macierz identycznościową. Zakładamy że h ma stały rząd w otoczeniu G . Uzasadnij że G jest grupą Liego.

Wskazówka: Użyj twierdzenie o rzędzie.

4. Niech J będzie ustaloną macierzą odwracalną. Sprawdź że zbiór rzeczywistych macierzy n na n A spełniających równanie $A^T J A = J$ gdzie A^T oznacza macierz transponowaną jest grupą Liego. Co dostaniemy w przypadku gdy J jest macierzą identycznościową. Wylicz przestrzeń styczną w identyczności w tym przypadku oraz dla $n = 2$ i

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i dla $n = 2k$ i

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

gdzie I oznacza macierz identycznościową wymiaru k .

5. Pokaż że grupa z wykładu z mnożeniem zadanym wzorem $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \exp(x_2)y_1 + y_2)$ jest izomorficzna z grupą przekształceń afinicznych prostej zachowujących orientację.

Przypominam że różniczkowaniem na pierścieniu funkcji gładkich T nazywamy $\mathbb{R}$ -liniowe odwzorowanie $D : T \rightarrow T$ spełniające wzór Leibniza $D(fg) = fD(g) + D(f)g$

6. Sprawdź że jeśli D_1 i D_2 są różniczkowaniami to ich komutator $D_1 D_2 - D_2 D_1$ też jest różniczkowaniem.

7. Używając wzór $(Xf)(g) = \partial_t f(\gamma(t)g)|_{t=0}$ (tzn. $Xf(g)$ to wartość pochodnej wyżej dla $t = 0$) gdzie γ jest wybraną krzywą z wektorem stycznym X wyznacz algebry Liego następujących grup: grupy Heisenberga i $GL(n, \mathbb{R})$ (grupy rzeczywistych macierzy odwracalnych n na n).

Wskazówka: Dobierz γ tak by uprościć obliczenia. By wyznaczyć nawias Liego wystarczy testować na niedużej liczbie funkcji, np. dla $GL(n, \mathbb{R})$ wystarczy obliczyć $(XY - YX)f$ dla liniowych f .