

1. Niech L będzie skończenie wymiarową algebrą Liego nad ciałem dowolnej charakterystyki i C będzie podalgebrą Cartana w L . Pokaż że $L = C + [L, L]$.

2. Pokaż że jeśli $N \subset A \subset L$, N jest podalgebrą Cartana w L , A jest podalgebrą L , to N jest podalgebrą Cartana w A .

3. Niech L będzie rozwiązalną algebrą Liego nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0 i niech N będzie podalgebrą Cartana w L . Wiemy że

$$L = N \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} L_\lambda = N \oplus V$$

gdzie λ są funkcjonalami pierwiastkowymi zaś L_λ odpowiednimi podprzestrzeniami pierwiastkowymi. Każde λ rozszerzamy z N na L kładąc $\lambda(x) = 0$ dla $x \in V$. Pokaż że to poprawnie definiuje λ na L i że tak rozszerzone λ nie zależą od wyboru N .

4. Niech $A = \mathfrak{sl}(n, F_q)$ oznacza algebrę Liego macierzy n na n o śladzie 0 nad ciałem q -elementowym F_q charakterystyki p . Dalej zakładamy że $n \geq 2$. Uzasadnij że jeśli $p \geq 3$ lub $p = 2, n \geq 3$ to macierze diagonalne D w A dają podalgebrę Cartana, tzn. mamy $D = A_0$ w rozkładzie

$$A = A_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \neq 0} A_\alpha = A_0 \oplus V$$

(i rozkład istnieje). W przypadku $n = p = 2$ cała algebra A jest nilpotentna. Uzasadnij że dla $p \geq 3$ przestrzenie A_α dla $\alpha \neq 0$ w rozkładzie wyżej są jednowymiarowe. Dla $p = 2, n \geq 3$ przestrzenie A_α mają wymiar 2. Sprawdź że jeśli $q < n$ to nie istnieje element $c \in D$ taki że ad_c jest odwracalny na V , w przeciwnym razie, jeśli $n > 2$ to taki element istnieje.

Uzasadnij że dla p nie dzielącego n algebra A jest prosta. W przypadku gdy p dzieli n algebra A ma jednowymiarowe centrum Z . Sprawdź że dla $n \geq 3$ algebra A/Z jest prosta i że $Z \subset [A, A]$ (co oznacza że nie ma podalgebry dopełniczej do Z). Sprawdź że dla $p = 2$ forma Killinga jest zerowa na A , zaś dla $p \geq 3$ nie dzielącego n jest niezerowa.

5. Niech J będzie macierzą blokowo-diagonalną rozmiaru $2n$ na $2n$ z dwuwymiarowymi blokami postaci

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

na diagonalu i niech $\mathfrak{sp}(n, K)$ będzie przestrzenią macierzy nad ciałem K spełniających warunek $A^T J + J A = 0$ gdzie A^T oznacza macierz transponowaną. Sprawdź że $\mathfrak{sp}(n, K)$ jest algebrą Liego z komutatorem jako nawiasem Liego. Sprawdź że dla $n = 1$ algebra $\mathfrak{sp}(n, K)$ jest równa $\mathfrak{sl}(2, K)$. Sprawdź że forma śladowa $\text{Tr}(AB)$ jest niezmiennicza i niezdegenerowana na $\mathfrak{sp}(n, K)$ o ile charakterystyka K jest różna od 2. Sprawdź że zbiór C macierzy blokowo-diagonalnych z blokami będącymi wielokrotnością bloku wyżej jest podalgebrą Cartana w $\mathfrak{sp}(n, K)$ i że $\mathfrak{sp}(n, K)$ jest algebrą prostą o ile charakterystyka K jest różna od 2.

6. Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Niech $R = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ oznacza pierścień funkcji wymiernych których mianownik jest wielokrotnością t . Niech $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} R$. $\mathfrak{k}$ jest algebrą Liego nad R , ale potraktujemy ją jako algebrę Liego nad $\mathbb{C}$. Uzasadnij że każdy ideał w $\mathfrak{k}$ jest modulem nad R (czyli faktycznie jest ideałem $\mathfrak{k}$ traktowanego jako algebrę Liego nad R). Sprawdź że jeśli I jest ideałem w R , to $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} I$ jest

ideałem w $\mathbf{k}$. Na R wprowadzamy różniczkowanie D wzorem $Dr = t\partial_t r$. Niech A będzie produktem półprostym $\mathbb{C}D$ z $\mathbf{k}$, gdzie $\mathbb{C}D$ traktujemy jako algebrę przemienną która działa przez naturalne rozszerzenie D na $\mathbf{k}$. Niech $\mathfrak{h}$ będzie podalgebrą Cartana w $\mathfrak{g}$ które utożsamiamy ze podalgebrą $\mathfrak{g} \otimes 1$ w $\mathbf{k}$. Wtedy $\mathbb{C}D \oplus \mathfrak{h}$ jest podalgebrą Cartana w A .

Komentarz: Algebry w stylu $\mathbf{k}$ wyżej nazywa się algebrami pętli.

7. Niech $\mathfrak{gl}(\infty, K)$ będzie algebrą Liego nieskończonych macierzy nad ciałem K które mają tylko skończenie wiele niezerowych elementów (nawias Liego to komutator macierzy). Uzasadnij że dla takich macierzy ślad jest dobrze zdefiniowany i że podprzestrzeń macierzy $A = \mathfrak{sl}(\infty, K)$ macierzy o śladzie 0 jest podalgebrą. Uzasadnij że macierze diagonalne C o śladzie 0 dają podalgebrę Cartana w A w następującym sensie: C jest algebrą przemienną, operatory ad_c dla $c \in C$ diagonalizują się i C jest wspólną podprzestrzenią zerową, ale nie istnieje c z ad_c odwracalnym na A/C . Uzasadnij że A jest prosta. A jako podalgebra działa (przez ad) na $\mathfrak{gl}(\infty, K)$ i jest podprzestrzenią niezmienniczą. Uzasadnij że nie istnieje A -niezmiennicza podprzestrzeń dopełnicza.

8. Sprawdź że jeśli pierścień podstawowy zawiera liczby wymierne to algebra symetryczna (tzn. tensory podzielne przez komutatory) jest izomorficzna z tensorami symetrycznymi (niezmienniczymi na permutacje czynników). Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0. Odwzorowanie symetryzacji $s : S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ z algebry symetrycznej do uniwersalnej algebry obwiedniej $\mathfrak{g}$ definiujemy jako obcięcie odwzorowania ilorazowego $T(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ do tensorów symetrycznych. Sprawdź że dla $g \in \mathfrak{g}$ operator ad_g jednoznacznie przedłuża się do różniczkowania $S(\mathfrak{g})$ jak i do różniczkowania $U(\mathfrak{g})$. Prowadzi to do działania $\mathfrak{g}$ na $S(\mathfrak{g})$ jak i na $U(\mathfrak{g})$. Elementy $S(\mathfrak{g})$ które przechodzą na 0 przy tym działaniu nazywamy niezmienniczymi.

Uzasadnij że s jest liniowe i na (ale zwykle nie jest homomorfizmem). Uzasadnij że s komutuje z działaniem $\mathfrak{g}$ przez różniczkowania, tzn. s jest homomorfizmem odpowiednich modułów Liego nad $\mathfrak{g}$. Wynioskuj stąd że centrum $Z(\mathfrak{g})$ algebry $U(\mathfrak{g})$ to obraz elementów niezmienniczych w $S(\mathfrak{g})$.

9. Niech G będzie zwartą grupą Liego zaś A algebrą Liego G . Pokaż że

- A jest sumą prostą swoich ideałów
- A jest sumą prostą algebry półprostej i abelowej
- A jeśli A jest półprosta to forma Killinga A jest ujemnie określona
- każdy skończenie wymiarowy A -moduł Liego jest sumą prostą modułów prostych

10. Niech A będzie algebrą Liego nad ciałem charakterystyki p i niech D będzie różniczkowaniem A . Uzasadnij że D^p też jest różniczkowaniem A .

11. Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego nad ciałem charakterystyki 0. Oznaczmy przez $\mathfrak{g}[[t]]$ algebrę formalnych szeregów potęgowych o współczynnikach w $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}[[t]]$ można traktować jako uzupełnienie algebry $\mathfrak{g} \otimes_K K[t]$ gdzie $K[t]$ oznacza pierścień wielomianów jednej zmiennej t o współczynnikach K (sprecyzuj to). Uzasadnij że wzór Campbella-Bakera-Hausdorffa daje szereg zbieżny w $\mathfrak{g}[[t]]$, a więc wprowadza na $\mathfrak{g}[[t]]$ strukturę grupy.