

1. Wyznacz podgrupy jednoparametrowe w grupie z zadania 5 z listy 1.
2. Wyznacz obraz odwzorowania eksponencjalnego w grupie $SL(2, \mathbb{R})$ rzeczywistych macierzy 2×2 o wyznaczniku 1.
3. Pokaż że jeśli grupa Liego G ma strukturę rzeczywistą analityczną (tzn. przejścia między mapami i operacje grupowe rozwijają się lokalnie w zbieżny szereg potęgowy), zaś h jest homomorfizmem klasy C^1 z $\mathbb{R}$ w G to h jest rzeczywście analityczny.

Definicja: Operacja D jest różniczkowaniem algebry Liego A nad pierścieniem R jeśli D jest R -liniowe i spełnia wzór Leibniza: $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$.

4. Niech h będzie gładką jednoparametrową podgrupą grupy automorfizmów skończenie wymiarowej algebry Liego $\mathfrak{g}$ nad liczbami rzeczywistymi (gładkość h oznacza gładkość jako odwzorowanie o wartościach w operatorach liniowych na $\mathfrak{g}$). Pokaż że istnieje różniczkowanie D na $\mathfrak{g}$ takie

$$h(t) = e^{tD} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tD)^k}{k!}.$$

5. Sprawdź że przy ustalony $s \neq 0$ i $t \neq 0$ odwzorowanie $h_{s,t}$ zadane wzorem

$$h_{s,t}(x, y, z) = (sx, ty, stz)$$

jest automorfizmem grupy Heisenberga.

Uwaga: To pokazuje że grupa Heisenberga jest *grupą jednorodną*.

6. Niech $Aut(H)$ oznacza grupę automorfizmów grupy H , zaś A jest homomorfizmem z G w $Aut(H)$. Na produkcie grup G i H wprowadzamy mnożenie wzorem:

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, (A(g_2^{-1})h_1)h_2)$$

Otrzymujemy w ten sposób grupę nazywaną produktem półprostym G i H (sprawdź). Pokaż że jeśli G i H są grupami Liego i A jest odwzorowaniem gładkim (jako odwzorowanie z $G \times H$ w H) to produkt półprosty G i H jest grupą Liego.

7. Przetwórz jako produkt półprosty następujące grupy: grupę przekształceń afinicznych na przestrzeni euklidesowej, grupę izometrii przestrzeni euklidesowej, grupę Heisenberga, grupę macierzy górno-trójkątnych (tzn. takich że wszystkie elementy poniżej diagonal są zerami).

8. Przestrzeń k -dżetów odwzorowań $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^n$ w punkcie 0 to przestrzeń ilorazowa przestrzeni wszystkich funkcji gładkich z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^n$ przez podprzestrzeń funkcji których $k+1$ pochodnych w 0 znika. Z definicji wynika że pochodne do rzędu k w 0 są dobrze zdefiniowane dla k -dżetów (nie zależą od wyboru reprezentantów). Pokaż że przestrzeń k -dżetów odwzorowań $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$ w punkcie 0 takich że wartość w 0 to 0 i pierwsza pochodna jest odwracalna ma naturalną strukturę grupy Liego (działaniem jest składanie (dżetów) odwzorowań).

9. Niech A będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią wektorową z bazą $X, Y_1, \dots, Y_n, \dots$. Na A zadajemy nawias Liego wzorem $[X, Y_i] = -[Y_i, X] = Y_{i+1}$ zaś $[Y_i, Y_j] = 0$. Sprawdź że to nam zadaje algebrę Liego i że A jest generowana przez X i Y_1 (tzn. najmniejsza podalgebra Liego A zawierająca X i Y_1 jest równa A).

10. Niech $Df = \partial_x^2 f$, $Mf(x) = x^2 f(x)$, $Jf(x) = 2x(\partial_x f)(x) + f(x)$. Pokaż że operatory D, M, J rozpinają rzeczywistą algebrę Liego (z komutatorem

jako nawiasem Liego). Podobnie iD, iM, J rozpinają rzeczywistą algebrę Liego. Sprawdź że te dwie algebry są izomorficzne z algebrą macierzy 2×2 o śladzie 0.